MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 27 de Noviembre de 2024

Aplicaciones de series de potencias a series de Fourier

P1.- [Para los más interesados: Fourier] Sean las series de potencias $\sum a_k x^k$ convergente para $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ y $\sum b_k x^k$ convergente para $x \in J \subseteq \mathbb{R}$, con I y J intervalos tales que $\text{int}(I \cap J) \neq \phi$. Se define la función:

$$f(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k x^k \sin k\xi + b_k x^k \cos k\xi \tag{1}$$

Nuestro objetivo será establecer alguna relación entre los valores de las sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ y la función f. Para esto, proseguimos como:

a) Muestre que la serie $\sum_{k\geq 1} a_k x^k \sin k\xi = \sum_{k\geq 1} g_k(\xi)$ converge absoluta y uniformemente. Para la convergencia uniforme use el siguiente teorema:

Teorema 1. (Prueba M de Weierstrass) Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones real definidas en un conjunto A. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $M_n \geq 0$ tal que $|g_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$, y la serie $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformemente en A.

b) Argumente por qué pasa lo mismo para $\sum_{k\geq 1} b_k x^k \cos k\xi$.

c) Use lo anterior para argumentar que existen valores de x para los cuales $f(\xi)$ está definida para algún ξ. Concluya que f está definida en $\mathbb{R}$ para tales valores de x.

Hint: convergencia uniforme $\Longrightarrow$ convergencia.

d) Deduzca que $\pi a_0 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$. Para esto, integre la expresión 1 en ambos lados en $(-\pi, \pi)$.

Indicación: puede meter la integral dentro de la sumatoria.

e) Multiplique la ecuación (1) por $\sin n\xi$, para algún $n \in \mathbb{N}$ fijo, integre sobre $(-\pi, \pi)$ en ambos lados y deduzca que:

$$\pi a_n = x^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \quad \text{ para } x \neq 0$$

luego, multiplique por $\cos n\xi$ para $n \in \mathbb{N}$ y encuentre una expresión análoga para b_n.

Indicación: use las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos ntdt = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq m \\ \pi \text{ si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin ntdt = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq m \\ \pi \text{ si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cos ntdt = 0$$