

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Cristián Reyes.

Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.

Fecha: 27 de Noviembre de 2024



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 14: Series de potencias

P1.- Determine el intervalo de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k(k+1)}$

c) $\sum_{k \geq 0} \frac{(3^k + 4^k)}{5^k} x^k$

b) $\sum_{k \geq 0} x^{2^k}$

d) $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k^2} (x+1)^k$

P2.- Deduzca los siguientes desarrollos, para $|x| < 1$, y determine el intervalo de convergencia:

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

P3.- Pruebe que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

Resumen

- **[Serie de potencias]** Se define como la serie $\sum_{k \geq 0} a_k (x - \alpha)^k$. Se dice que está centrada en α , estudiaremos sólo $\alpha = 0$.
- **[Proposición]** Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x|)$ y para todo $x \in [-a, a]$, la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.
- **[Radio de convergencia]** Definimos el radio de convergencia de la serie $\sum a_k x^k$ como $R = \sup\{x_0 : \sum a_k x_0^k < +\infty\}$, en particular:

$$1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n}$$

- **[Intervalo de convergencia]** Una vez con el radio de convergencia de una serie, hay que evaluarla en sus bordes y ver si converge, éste es el intervalo de convergencia, y se tiene que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$, con R el radio de convergencia.
- **[Teorema]** Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias con radio de convergencia mayor que 0. Definiendo la función $f(x) = \sum a_k x^k$, ésta es continua en $\text{int}(\text{Dom} f)$. Además, es integrable y derivable en $(-R, R)$ y:

$$\begin{aligned} \forall x \in (-R, R), \quad \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \left(\sum a_k t^k \right) dt = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \\ \forall x \in (-R, R), \quad f'(x) &= \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1} \end{aligned}$$

En el fondo, toda serie de potencias, se puede integrar y derivar para $x \in (-R, R)$, con R el radio de convergencia.

- **[Proposición]** Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Entonces, $\forall p \in \mathbb{Z}$, la serie $\sum k^p a_k x^k$ tiene radio de convergencia R .
- **[Teorema]** Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0 . Entonces se tiene:
 - La serie $\sum (a_k + b_k) x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.
 - Si $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$, la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, y se tiene que $\sum c_k x^k = \left(\sum a_k x^k \right) \left(\sum b_k x^k \right)$.