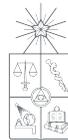


MA1002 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Cristián Reyes.**Auxiliares:** Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.**Fecha:** 13 de Noviembre de 2024
fcfm

Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE**Auxiliar 12: Series****P1.-** Determine si las siguientes series convergen o no:

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 10}}{(n-1)^3}$

c) $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$

b) $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$

P2.- Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continua y creciente en $[0, 1]$ con $g(0) = 0$. Pruebe que la serie $\sum_{n \geq 1} g\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si y sólo si la integral $\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx$ converge.

P3.- Muestre que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente.

P4.- Decida si la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{n!e^n}{n^n}$ converge o no.

P5.- Muestre que $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{e^n} \in (2/e, 2)$.

P6.- Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones positivas, ¿qué puede decir de la convergencia de las series $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$?, ¿y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$?

Resumen

- **[Serie]** Se define una serie s como el límite de las sumas parciales $(s_n)_n$:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

donde $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales.

- **[Sucesión de Cauchy]** Para una sucesión $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ se dice que es de Cauchy si cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- **[Teorema]** Para $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, la sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente.
- **[Criterio de Cauchy]** Sea $(a_n)_n$ una sucesión y $(s_n)_n$ la sucesión de sus sumas parciales. La serie $\sum a_k$ converge ssi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, m > n, \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

- **[Teorema]** Si la serie $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$.
- **[Teorema]** Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes, entonces:
 1. $\sum (a_k + b_k)$ es convergente, y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.
 2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda a_k$ es convergente, y su valor es $\lambda(\sum a_k)$.
- Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
- **[Teorema]** Sea $\sum a_k$ una serie de términos no-negativos y convergente. Sea $(b_k)_k$ una numeración del conjunto $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\sum b_k$ es convergente, y $\sum b_k = \sum a_k$.

- [Mayoración de series]** Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones no-negativas de modo que existen n_0 y $\alpha > 0$ tales que, $\forall n \geq n_0, a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que:

$$\sum b_k < \infty \implies \sum a_k < \infty$$

- [Comparación por cociente]** Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones positivas, y supongamos que $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe, entonces:

- Caso $c = 0$: $\sum b_k < \infty \implies \sum a_k < \infty$.
- Caso $c > 0$: $\sum b_k < \infty \iff \sum a_k < \infty$.

- [Criterio del cociente]** Sea $(a_n)_n$ una sucesión positiva, y supongamos que el límite $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, entonces:

- Si $r < 1$: $\sum a_k$ converge.
- Si $r > 1$ o $r = \infty$: $\sum a_k$ diverge.
- Si $r = 1$: $\sum a_k$ puede converger o diverger.

- [Criterio de la raíz n-ésima]** Sea $(a_n)_n$ una sucesión positiva, y supongamos que el límite $r = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n}$ existe, entonces:

- Si $r < 1$: $\sum a_k$ converge.
- Si $r > 1$ o $r = \infty$: $\sum a_k$ diverge.
- Si $r = 1$: $\sum a_k$ puede converger o diverger.

- [Criterio de la Integral impropia]** Sea $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ decreciente, entonces:

$$\sum_{n \geq 1} f(n) < \infty \iff \int_1^{\infty} f < \infty$$