MA1002 Cálculo Diferencial e Integral

Auxiliar: Patricio Yáñez

P1. Sean a_n y b_n dos sucesiones que convergen a c tales que

$$a_n < c < b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, por el enunciado sabemos que se cumple

$$f(a_n) < 0 \wedge f(b_n) > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por la continuidad de f en $\mathbb{R}$ tenemos que $f(a_n) \to f(c)$ y $f(b_n) \to f(c)$, por lo que tomando el límite a las desigualdades anteriores tenemos por propiedad de límites que:

$$f(c) \leq 0 \wedge f(c) \geq 0$$

De donde se implica que $f(c) = 0$.

P2. Sea $x_0 \in A$. Por enunciado sabemos que:

$$\forall x \in A,\ \exists L \geq 0,\ |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$$

Caso $L = 0$: En este caso se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq 0,\ \forall x \in A$, lo cual implica que

$$f(x) = f(x_0),\ \forall x \in A$$

Luego la función es constante y trivialmente continua en todo A.

Caso $L > 0$: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que si pedimos que x esté lo suficientemente cerca de x_0, es decir, que $|x - x_0| \leq \delta$ para algún $\delta > 0$, entonces tendremos que:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq L\delta$$

Por lo que eligiendo $\delta = \varepsilon/L$ tendremos que $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Dada la arbitrariedad de ε, hemos probado que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Es decir, f es continua en A.

P3. Veamos primero la implicancia hacia la derecha. Sea entonces f continua en x_0. Tenemos entonces que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Como ε es una cota superior del conjunto $\{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq \delta\}$, es inmediato tener entonces que, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, tal que

$$\sup_{x \in A}\{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq \delta\} \leq \varepsilon$$

Además, puesto que $r_n \to 0$, para $\delta > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0$, $r_n \leq \delta$ (esto último puesto que $|r_n| = r_n$). Notemos que $|x - x_0| \leq r_n \Rightarrow |x - x_0| \leq \delta,\ \forall n \geq n_0$. Debido a esto es también cierto que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0$,

$$s_n := \sup_{x \in A}\{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq r_n\} \leq \varepsilon$$

Es decir, $s_n \to 0$.
Para la implicancia hacia la izquierda, tomemos como cierto que

$$s_n := \sup_{x \in A}\{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq r_n\} \to 0$$

Notemos que es inmediato ver que

$$|x - x_0| \leq r_n \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq s_n$$

Como ambos valores absolutos son mayorados por una sucesión nula, son también sucesiones nulas. Esto, por propiedad de las sucesiones, significa que:

$$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$$

Es decir, f es continua en x_0.

P4. Para la discontinuidad en $\mathbb{Q}$, basta tomar $x_0 \in \mathbb{Q}$ y una sucesión $x_n \to x_0$ tal que $x_n \notin \mathbb{Q}$. Esta sucesión está bien definida debido a que la densidad de los irracionales nos permite acercarnos indefinidamente a cualquier número real. A partir de esto, vemos que $x_n \to x_0$ y $f(x_n) = 0 \to 0$. Sin embargo $f(x_0) = 1/q \neq 0$, por lo que $f(x_n) \not\to f(x_0)$ y f es discontinua en $x_0 \in \mathbb{Q}$.
Para la continuidad en $x_0 \notin \mathbb{Q}$, buscamos demostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \tag{1}$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ arbitrario. Lo que sigue será un intento por encontrar un δ lo suficientemente pequeño como para que los valores de $|f(x)|$ no puedan superar a ε. Nos despreocuparemos de los $x \notin \mathbb{Q}$ por ahora puesto que en este caso $f(x) = 0$, trivialmente menores a ε. Notemos entonces que para acotar a las imágenes de los racionales necesitamos que se cumpla:

$$|f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1/|q| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |q| \geq 1/\varepsilon$$

Es decir, que la magnitud de los denominadores debe ser superior a $1/\varepsilon$. Basta con buscar que el denominador tenga una magnitud mínima de $\lambda = [1/\varepsilon] + 1$.
Definimos ahora:

$$A_i = \left\{x \in \mathbb{Q} : |f(x)| = \frac{1}{i}\right\} \qquad d_i = \min\{|x - x_0| : x \in A_i\}$$

Note en primer lugar (y esto es importante), que $d_i > 0,\ \forall i \in \mathbb{N}$, puesto que, al ser x racional y x_0 irracional, nunca se tendrá una distancia nula. A modo de explicación, note que si tomamos $0 < \delta < d_1$, entonces al imponer $|x - x_0| \leq \delta$ jamás se tendrá que $|f(x)| = 1$, puesto que aquellos x que tienen esa imagen están demasiado lejos. En forma general, si tomamos $0 < \delta < d_i$, entonces al imponer $|x-x_0| \leq \delta$ jamás se tendrá que $|f(x)| = 1/i$. Luego es directo tomar

$$0 < \delta_0 < \min\{d_i\}_{i=1}^{\lambda}$$

Con lo que si imponemos $|x - x_0| \leq \delta_0$, jamás se tendrá que $f(x) \in \{1/i\}_{i=1}^{\lambda}$. En definitiva, tenemos que:

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ |x - x_0| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} \leq \varepsilon$$

Y como para $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$, la afirmación anterior se generaliza para todo $\mathbb{R}$. Luego tomando $\delta = \delta_0$, la afirmación (1) es verdadera y f es continua en $x_0 \notin \mathbb{Q}$.

P5. Utilizando la indicación, sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $h(x_0) > 0$. La continuidad en x_0 nos dice que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ h(x_0) - \varepsilon \leq h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$$

Como nos interesa que $h(x) > 0$, basta hacer que $h(x_0) - \varepsilon > 0$. Recordando que $h(x_0) > 0$, podemos elegir $\varepsilon = h(x_0)/2 > 0$ para obtener que existe $\delta > 0$, tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple

$$h(x) \geq h(x_0) - \varepsilon = h(x_0) - \frac{h(x_0)}{2} = \frac{h(x_0)}{2} > 0 \Rightarrow h(x) > 0$$

Por lo que tomando $\epsilon = \delta$ tenemos lo pedido. Para demostrar el problema original, basta considerar la función $h(x) = f(x) - g(x)$ claramente continua por ser suma de funciones continuas, y en donde se verifica que $h(x_0) > 0$. Gracias a lo demostrado anteriormente, tenemos que existe ϵ tal que

$$h(x) = f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \qquad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

P6.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Haremos una demostración que comenzará por el conjunto de los números naturales. A partir de este resultado se generalizará la propiedad hasta los números reales.

$(a1)$ Antes de continuar será conveniente ver que:

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Probaremos en primer lugar que $f(nx) = nf(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Fijemos $x \in \mathbb{R}$ y procedamos por inducción.
Los casos $n = 0$ y $n = 1$ son triviales. Supongamos que se cumple para cierto $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Por lo que la propiedad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$. Gracias a la arbitrariedad de x, también es cierta $\forall x \in \mathbb{R}$. Para extender el resultado a $n \in \mathbb{Z}$, notemos que solo falta demostrar la veracidad de la proposición para los negativos. Luego sea $n \in \mathbb{Z}^-$ y, advirtiendo que $(-n) \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$0 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx) = f(nx) - nf(x) \Rightarrow f(nx) = nf(x)$$

Por lo tanto, $f(nx) = nf(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
Sea ahora $x \in \mathbb{Q}$. Sabemos que $x = p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Luego podemos hacer:

$$\left.\begin{array}{l} f(p) = f(q \cdot \frac{p}{q}) = qf(\frac{p}{q}) \\ f(p) = f(p \cdot 1) = pf(1) \end{array}\right\} \Rightarrow qf\left(\frac{p}{q}\right) = pf(1) \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1) \Rightarrow f(x) = ax$$

Donde se definió $a = f(1)$. Sea ahora $x \in \mathbb{R}$ y una sucesión $x_n \to x$ tal que $x_n \in \mathbb{Q}$, que está bien definida debido a la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$. Por la propiedad recién vista tenemos que $f(x_n) = ax_n \to ax$. Pero por la continuidad de f tenemos también que $f(x_n) \to f(x)$. Debido a la unicidad del límite, debe cumplirse que $f(x) = ax$, con lo que se demuestra lo pedido.

$(a2)$ La mecánica es la misma. Veamos que:

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$$

Probemos que $f(nx) = f(x)^n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Fijemos $x \in \mathbb{R}$ y procedamos por inducción.
Los casos $n = 0$ y $n = 1$ son triviales. Supongamos que se cumple para cierto $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$$

Por lo que la propiedad es cierta. Sea $n \in \mathbb{Z}^-$. Luego:

$$1 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx)f(-nx) = f(nx)f(x)^{-n} \Rightarrow f(nx) = f(x)^n$$

Por lo tanto, se generaliza que $f(nx) = f(x)^n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
Sea ahora $x \in \mathbb{Q}$. Como $x = p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, podemos hacer:

$$\left.\begin{array}{l} f(p) = f(q \cdot \frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q \\ f(p) = f(p \cdot 1) = f(1)^p \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)^q = f(1)^p \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{\frac{p}{q}} \Rightarrow f(x) = a^x$$

Donde se definió $a = f(1)$. Sea ahora $x \in \mathbb{R}$ y una sucesión $x_n \to x$ tal que $x_n \in \mathbb{Q}$. Tenemos que $f(x_n) = a^{x_n} \to a^x$. Pero por la continuidad de f tenemos también que $f(x_n) \to f(x)$. Debido a la unicidad del límite, debe cumplirse que $f(x) = a^x$, con lo que se demuestra lo pedido.

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ continua tal que $f(xy)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in(0,\infty)$. Note que la función $\log_a(x)$ es la inversa de a^x cuando $x\in(0,\infty)$. Intentaremos demostrar el resultado usando lo demostrado en $(a2)$ a través de $f^{-1}(x)$. Si probamos que $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)f^{-1}(y)$, entonces es directo usar $(a2)$. Note que, como $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, entonces $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\infty)$. Luego, como $f^{-1}(x)$ y $f^{-1}(y)$ están en $(0,\infty)$, tendremos por propiedad de la función f que se cumple:

$$f(f^{-1}(x)f^{-1}(y))=f(f^{-1}(x))+f(f^{-1}(y))=x+y$$

De donde aplicando f^{-1} a ambos lados obtenemos:

$$f^{-1}(x)f^{-1}(y)=f^{-1}(x+y)$$

Gracias a lo visto en $(a2)$, tenemos que:

$$f^{-1}(y)=a^y \qquad \text{con}\ \ a=f^{-1}(1),\ y\in\mathbb{R}$$

Y si ocupamos $y=f(x)$, tenemos que:

$$f^{-1}(f(x))=a^{f(x)}\Leftrightarrow x=a^{f(x)}\Leftrightarrow \log_a(x)=f(x)$$

Que era lo que se quería demostrar.