

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez

Correo:pyanez@dim.uchile.cl



Resumen C1-Estudio Sucesiones-funciones-derivación-optimización

- Una **sucesión** es una función

$$s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto s(n) = s_n$$

- $s_n \rightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$
- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ , a la sucesión $s_{\varphi(n)}$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \rightarrow \ell \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \\ \text{convergen a } \ell$$

- **Teorema de Bolzano - Weierstrass**

Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente

- **Función continua en un punto**

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\bar{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow \bar{x} \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$

- **Caracterización $\varepsilon - \delta$**

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon\}$$

- **Álgebra de funciones continuas**

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g, \frac{f}{g}$ con $g(\bar{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua

- Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.
- **[TVI o Bolzano]** Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.
- **[TVI-Generalizado]** Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = x_0$

■ **[Teorema de Weierstras]**

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ es continua.

■ **[Continuidad Uniforme]**

Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no del eventual $\bar{x}$ que puedo estudiar.

- Toda función uniformemente continua es continua.
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $\bar{x} \in A$
- Diremos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a, b)$, si existe el limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

Equivalentemente, f es derivable en $\bar{x}$ si existe $m = f'(\bar{x})$ tal que $f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$

- Si f es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en $\bar{x}$
- **[Álgebra de derivadas]** Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces:

1. $f \pm g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f \pm g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \pm g'(\bar{x})$$

2. $f \cdot g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f \cdot g)' = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

3. Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g^2(\bar{x})}$$

■ **[Regla de la cadena]**

Sean $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

También se puede usar la notación de leibniz obteniendo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ donde $y = y(u)$ y $u = u(x)$, es decir y depende de u y u depende de x .

- **[Derivada de la función inversa]** Sea $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$ con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Analogamente $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ donde $y = y(x)$ y $x = x(y)$

- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a , la derivada de orden n de $(f \cdot g)$ está dada por:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

Derivadas conocidas

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $(c)' = 0$ | 6. $(e^x)' = e^x$ | 11. $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ | 7. $(\sin(x))' = \cos(x)$ | 12. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| 3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ | 8. $(\cos(x))' = -\sin(x)$ | 13. $(a^x)' = a^x \ln(a)$ |
| 4. $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ | 9. $(\tan(x))' = \sec(x)^2$ | 14. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$ |
| 5. $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ | 10. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | |

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\bar{x}$ es mínimo local de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$$

Es decir, llamaremos a $\bar{x}$ como mínimo local si $f(\bar{x})$ es el menor valor en alguna vecindad. Notar que con esto, pueden existir muchos mínimos locales.

De manera análoga se define el máximo local

- **[Máximos y Mínimos]** Si $\bar{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$
- **[Teorema de Rolle]** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Luego existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
- **[TVM]** Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **[L'Hôpital]** Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Donde $L = 0$ o $L = \infty$. Luego:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- **[Asíntotas]** 3 tipos (estudiar independiente hacia $+\infty$ o $-\infty$)

1. Horizontal: $y = c$, calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$.
2. Vertical: $x = a$, encontrar a tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \pm\infty$.
3. Oblicuas: $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Se tiene lo siguiente

- Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
- Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.

Análogo para estrictamente creciente/decreciente

- **[Convexidad]** Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right] (z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

o equivalentemente

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b) . En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f será convexa si $f'' \geq 0$.
- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente

- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(k+1)$ -veces derivable en todo punto del intervalo (a, b) . Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (respectivamente $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que:

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!} (x - \bar{x})^{k+1}$$

Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$

*“El trabajo tesonero todo lo vence”
Pa la laif*