Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

14 Series de potencias

Definición 1 (Serie de potencias). Una serie de potencias es una serie en donde el término general es de la forma $a_k(x-\alpha)^k$.

No es difícil notar que la convergencia de estas series depende fuertemente del valor de x. Nosotros nos concentraremos en el caso de series de potencias centradas en cero, es decir, consideraremos solamente el caso $\alpha = 0$.

Proposición 1 Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a, a]$ la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.

14.1 Radio e intervalo de convergencia

Notar que la Proposición 1 nos dice que si $\sum a_k x_0^k$ diverge entonces también diverge la serie $\sum a_k x^k$ para $|x| > |x_0|$. Definamos

$$R = \sup \left\{ x_0 : \sum a_k x_0^k < \infty \right\}.$$

Este valor es finito si existe algún x para el cual la serie $\sum a_k x^k$ diverge y vale ∞ en otro caso.

Definición 2 (Radio de Convergencia). Al valor R lo llamaremos el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_k x^k$.

La Proposición 1 nos asegura que para todo $x \in (-R, R)$ la serie converge y para todo $x \notin (-R, R)$ la serie diverge. Si aplicamos el criterio de la raíz n-ésima a la serie $\sum a_k x^k$ obtenemos $r = |x| \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Entonces, $\rho = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ es igual a $\frac{1}{R}$ cuando $R \neq 0$ y vale cero cuando $R = \infty$, con lo que tenemos una manera de calcular R basada solamente en (a_n).

Definición 3 (Intervalo de Convergencia). Llamamos intervalo de convergencia I al conjunto de reales x para los cuales la serie $\sum a_k x^k$ converge. Tenemos que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

14.2 Series de potencias, integración y derivación

Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I, es posible definir naturalmente la función

$$\begin{aligned} &f : I \to \mathbb{R} \\ &x \longmapsto f(x) = \sum a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{aligned} \tag{1}$$

Teorema 1 Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias con radio de convergencia mayor que cero. Definiendo la función f como en (1), se tiene que ella es continua en $\operatorname{int}(\operatorname{Dom} f)$.

Proposición 2 Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Entonces para todo $p \in \mathbb{Z}$, la serie $\sum k^p a_k x^k$ tiene radio de convergencia R.

Teorema 2 Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función f definida como en (1), es integrable en $(-R, R)$ y

$$\forall x \in (-R, R), \quad \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum a_k t^k \right) dt = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

Teorema 3 Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función f definida como en (1), es derivable en $(-R, R)$ y

$$\forall x \in (-R, R), \quad f'(x) = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

Los resultados anteriores nos dicen que el radio de convergencia de una serie y el de la serie derivada son iguales. Más aún, lo mismo es cierto para la serie derivada por lo que también será cierto para las derivadas de cualquier orden. Entonces la función $f(x)$ que se obtiene de la serie de potencias es infinitamente derivable y todas sus derivadas tienen el mismo radio de convergencia. Además se tiene que

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k\geq j} k(k-1)\dots(k-j) a_k x^{k-j},$$

es decir, la serie que se obtiene al derivar término a término la serie de la función f representa la derivada de orden j de f. De aquí que, $f^{(j)}(0) = a_j j!$, y entonces el término a_j de la serie que representa a f debe ser $\dfrac{f^{(j)}(0)}{j!}$, es decir, aquel de la serie de Taylor para f en torno a cero.

14.3 Álgebra de series de potencias

Las series de potencias se pueden sumar y multiplicar y los radios de convergencia de las series resultantes estarán determinados por aquellos de las series originales.

Teorema 4 Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0. Entonces la serie $\sum (a_k + b_k) x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum (a_k + b_k) x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además, si $c_k = \sum a_j b_{k-j}$ la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.