# Resumen Cálculo Diferencial e Integral

**Patricio Felmer**

**Matías Carvajal**
**Nicolás Fuenzalida**

# 13 Series numéricas

## 13.1 Definición y ejemplos básicos

En esta parte estudiaremos la noción intuitiva de sumas infinitas que llamaremos series. Estudiaremos solamente conjuntos finitos o numerables.

**Definición 1** (Serie). Una serie es un par ordenado $(A, (a_n))$ donde $A$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable y $(a_n)_{n\geq 0}$ es una numeración (ordenamiento) del conjunto $A$.

La sucesión $(a_n)$ se llama el término general de la serie. A partir de $(a_n)$ definimos la sucesión $(s_n)$ de las sumas parciales por
$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. El valor de la serie existe cuando la sucesión $(s_n)$ posee límite. En tal caso decimos que la serie es **convergente** y su valor es el límite de $(s_n)$.

## 13.2 Condiciones para la convergencia

**Definición 2** (Sucesión de Cauchy). Una sucesión $(x_n)$ de números reales se dice de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**Teorema 1** Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.

**Teorema 2** (Criterio de Cauchy). Sea $(a_n)$ una sucesión y $(s_n)$ la sucesión de sus sumas parciales. La serie $\sum a_k$ converge si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, m > n \Longrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

**Teorema 3** Si la serie $\sum a_k$ converge entonces la sucesión $(a_n) \to 0$.

**Observación** No es cierto que si $(a_k) \to 0$ entonces la serie $\sum a_k$ converja.

## 13.3 Álgebra de series

**Teorema 4** Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes. Entonces

1. $\sum(a_k + b_k)$ es convergente y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.
2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum(\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\lambda(\sum a_k)$.

## 13.4 Criterios para analizar convergencia de series de términos no negativos

**Teorema 5** Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.

**Teorema 6** Sea $\sum a_k$ una serie de términos no negativos y convergente. Sea $(b_k)$ una numeración del conjunto $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\sum b_k$ es convergente y $\sum b_k = \sum a_k$.

**Mayoración de series**

**Teorema 7** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones no negativas de modo que existen $n_0$ y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$ entonces $\sum a_k < \infty$.

**Observación** La contrarrecíproca de este criterio nos dice que si $\sum a_k$ diverge lo mismo le ocurre a $\sum b_k$.

**Comparación por cociente**

**Teorema 8** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones tales que, para todo $n \geq 0$, $0 < a_n, b_n$ y supongamos que $c := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$ existe. Se tienen las siguientes afirmaciones dependiendo del valor de $c$.

1. Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < \infty$ entonces $\sum a_k < \infty$.
2. Caso $c > 0$. Se tiene que $\sum b_k < \infty$ si y sólo si $\sum a_k < \infty$.

**Criterio del cociente**

**Teorema 9** Sea $(a_n)$ una sucesión de términos positivos y supongamos que $r := \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe. Dependiendo del valor de $r$ se tienen las siguientes conclusiones.

1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
2. Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.
3. Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, es decir, en este caso el criterio no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie.

**Observación** El límite $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ podría no existir y la serie $\sum a_k$ ser convergente.

**Criterio de la Raíz $n$-ésima**

**Teorema 10** Sea $(a_n)$ una sucesión de términos no negativos y supongamos que $r := \lim (a_n)^{\frac{1}{n}}$ existe. Se tienen las siguientes conclusiones.

1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.

2. Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.

3. Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, en este caso el criterio no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie.

**Criterio de la integral impropia**

**Teorema 11** Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f(n) < \infty$ equivale a $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx < \infty$.

## 13.5 Criterios Generales

Para una sucesión $(u_n)$ acotada y no negativa, definamos la sucesión $(v_n)$ por $v_n = \sup\{u_k : k \geq n\}$, entonces $(v_n)$ es una sucesión decreciente, pues cuando $n$ crece, el supremo es calculado sobre un conjunto de índices menor (en el sentido de la inclusión), y es acotada inferiormente. En consecuencia, $\lim v_n$ siempre existe. A este límite se le llama el límite superior de $(u_n)$ y se denota $\limsup u_n$. Si la sucesión converge entonces $\limsup u_n = \lim u_n$.

**Teorema 12** Sea $(a_n)$ una sucesión de términos no negativos y $u_n = (a_n)^{\frac{1}{n}}$. Sea $r := \limsup u_n$.

1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
2. Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.
3. Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir.

## 13.6 Series de signo arbitrario

**Definición 3** (Convergencia Absoluta). Sea $\sum a_k$ una serie con $(a_k)$ una sucesión cualquiera. Decimos que la serie es absolutamente convergente si $\sum |a_k| < \infty$.

**Teorema 13** Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si las series de sus términos negativos y la de sus términos positivos son convergentes.

## 13.7 Criterio de Leibniz

Para mostrar ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes (se les llama **condicionalmente convergentes**) vamos a probar el siguiente teorema.

**Teorema 14** Sea $(a_n)$ una sucesión decreciente y convergente a cero (luego $(a_n)$ es no negativa). Entonces la serie $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

## 13.8 Estabilidad de las series bajo reordenamiento

**Teorema 15** Si la serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente entonces toda serie $\sum b_k$ donde $(b_k)$ es un reordenamiento de $(a_k)$ es absolutamente convergente y su valor es igual a $\sum a_k$.

**Teorema 16** Si $\sum a_k$ es condicionalmente convergente entonces para cualquier número $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva tal que $\sum a_{f(k)} = \alpha$.

## 13.9 Multiplicación de series

**Teorema 17** Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes entonces $(\sum a_k)(\sum b_k)$ es igual a $\sum c_k$ donde $(c_k)$ es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada uno de los productos $a_i b_j$, por ejemplo, $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.