# Resumen Cálculo Diferencial e Integral

**Patricio Felmer**

**Matías Carvajal**
**Nicolás Fuenzalida**

# 11 Aplicaciones de la Integral (2)

## 11.1 Longitud de un Arco de Curva (Rectificación)

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano $OXY$, donde $x \in [a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para el largo de esta curva.

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

En consecuencia, diremos que esta última fórmula define el concepto de longitud de curva cuando $f$ es una función continuamente diferenciable en un intervalo $[a, b]$. Incluso usaremos esta fórmula en el caso de funciones continuamente diferenciables por pedazos.

## 11.2 Superficie del Manto de un Sólido de Revolución

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano $OXY$, donde $f$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para calcular el área del manto del sólido generado por la rotación de la región bajo la curva $y = f(x)$, en torno al eje $OX$.

$$A_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

## 11.3 Coordenadas Polares

**Definición 1** Dado los reales $r$ y $\phi$, se determina el punto $P$ del plano de coordenadas $(x, y)$ mediante las fórmulas

$$x = r\cos(\phi)$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\phi).$$

El par $(r, \phi)$ corresponde a las coordenadas polares del punto $P$.

### Área en Coordenadas Polares

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Usando esta función se define la curva en coordenadas polares cuya ecuación es $r = f(\phi)$. Supongamos además que la función $f$ es no negativa y que $b - a \leq 2\pi$. Con estos supuestos se desea encontrar el área de la región $R$ definida por

$$R = \{(r\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\phi) : \phi \in [a, b], r \in [0, f(\phi)]\}.$$

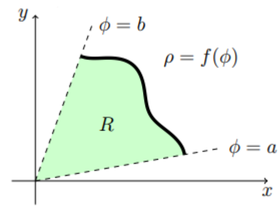


**Figura 1:** Región en coordenadas polares.

$$\text{área}(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\phi)\,d\phi.$$

## 11.4 Centro de Gravedad de una Superficie Plana

Considérese un plano ideal, sin peso, en el cual se encuentran localizadas $n$ partículas puntuales $P_i$ de masas $m_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Si este plano se apoya sobre un eje recto horizontal, nos interesa estudiar la tendencia del plano a rotar en torno a dicho eje accionado por el peso de las partículas. Considerando un sistema ortogonal de ejes $OXY$ en el plano, y la recta paralela al eje $OY$ de ecuación $L : x = x_0$, la tendencia a rotar del plano en torno de $L$ se mide matemáticamente por el "Momento Estático" que produce el peso de las partículas en torno de $L$, que, para una partícula aislada, resulta ser igual al producto del peso por la distancia al eje de rotación.

Para el sistema de $n$ partículas, el momento estático total es igual a la suma de los $M_L(x_i)$, o sea:

$$M_L = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)m_i g.$$

El sistema de partículas estará en equilibrio cuando su momento estático total sea nulo, es decir, cuando $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)m_i g = 0$. De esta ecuación se despeja fácilmente la posición de la recta en torno a la cual no hay tendencia a la rotación.

Su ecuación sería

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Análogamente si se considera ahora la tendencia del plano a rotar en torno a un eje paralelo a $OX$, se llega a la expresión:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

El punto de coordenadas $(x_0, y_0)$ se llama centro de gravedad del sistema. Teóricamente, el plano queda en equilibrio sustentado de ese punto únicamente.

**Momento Estático y Centro de Gravedad de un Área Plana**

El concepto de momento y de centro de gravedad se extiende fácilmente al caso en que la masa total del sistema se encuentra uniformemente distribuida sobre una región plana. Para esto debe tenerse presente que:

1. Si una región plana tiene un eje de simetría, su centro de gravedad debe estar sobre él. Es el caso, por ejemplo, de un cuadrado, un rectángulo, de un círculo, etc.

2. La masa de cualquier región de área $A$ es $\rho \cdot A$, donde $\rho$ es la densidad y la suponemos contante.

Se deduce que las coordenadas del centro de gravedad $(X_G, Y_G)$ son

$$X_G = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

$$Y_G = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$