Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002 – Cálculo Diferencial e Integral

RP Nº 16: TFC generalizado y TVM para integrales

Profesor: Patricio Felmer
Auxiliares: Matías Carvajal y Nicolás Fuenzalida

◦ **Monotonía integral**

Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente tal que es derivable en $(1, \infty)$ y $f(1) = 1$. Considere la función $F(x) = [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_1^{x^2} f(t)dt$$

Estudie el crecimiento, signos y convexidad de la función F.

◦ **Solo para valientes**

Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función continua, biyectiva y dos veces derivable en su dominio. Se define la función g como sigue:

$$g(x) = \int_0^x xf(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$$

Pruebe que

$$g''(x) = 2f(x) + (x+1)f'(x) + xf''(x).$$

◦ **Desvanecimiento asintótico**

Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas, tales que $g(x) > 0$, $\forall x \in [0, \infty)$ y $f(0) = 0$. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)dx = 0, \quad (n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$$

◦ **Observar el detalle**

Sea $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ una función creciente, biyectiva y de clase C^1 . Demostrar que:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx$$