Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

9 Teorema Fundamental del Cálculo

9.1 Teorema Fundamental del Cálculo

Proposición 1 Sea f una función integrable en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, entonces la función G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

Teorema 1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces la función G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $\text{int}(I)$ y además $G' = f$ en $\text{int}(I)$.

Observación Notemos que la expresión $G'(x) = f(x), \forall x \in \text{int}(I)$ más la continuidad de G en I nos indican que $G(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de la función f en I. Es decir, el primer teorema fundamental del cálculo nos garantiza que toda función continua en un intervalo posee primitivas.

Corolario 1 Si la función F, continua en I, es una primitiva de f en I, entonces:

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Observación La expresión $F(b) - F(a)$ se suele abreviar como

$$F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

Teorema 2 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Observación El Segundo Teorema fundamental del Cálculo es idéntico en contenido al corolario del Primer T.F.C., solo la hipótesis es más amplia, ya que solo pide que f sea integrable y no necesariamente continua.

Fórmula de Integración por Partes

Recordamos que si f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b) se tiene que:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Si además alguna de las funciones $f'g$ o fg' fuera integrable, la otra también lo sería y se tendría que

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg',$$

es decir,

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

Teorema 3 Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y diferenciables en $\text{int}(I)$. Sean $a, b \in \text{int}(I)$. Si f' y g' son continuas entonces

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Integración por Sustitución o Cambio de Variable

Teorema 4 Sea g una función continua en un intervalo I y derivable en $\text{int}(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in \text{int}(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a,b])$, entonces:

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

9.2 Teoremas del Valor Medio y Taylor para integrales

Definición 1 (Valor Medio de una función). Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ al número real:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

A este real se le anota $\bar{f}$ o bien $\langle f \rangle$.

Teorema 5 (Valor Medio para integrales). Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Teorema 6 (Valor Medio generalizado para integrales). Si f es continua en $[a,b]$ y g es una función integrable en $[a,b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Teorema de Taylor con Resto Integral

Sea I un intervalo abierto que contenga al intervalo cerrado de extremos x_0 y x. Consideremos una función f de clase $\mathcal{C}^{(n+1)}(I)$, entonces claramente

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0),$$

es decir,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Usando integración por partes repetidas veces, se obtiene la siguiente fórmula:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

El término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

se denomina resto integral del desarrollo de Taylor.

Observación Si en la expresión integral del resto se aplica el teorema del valor medio generalizado para integrales se tiene que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)}}{(n + 1)!}$$

que corresponde a la expresión de Lagrange para el resto del desarrollo de Taylor.