Resumen Cálculo Diferencial e Integral

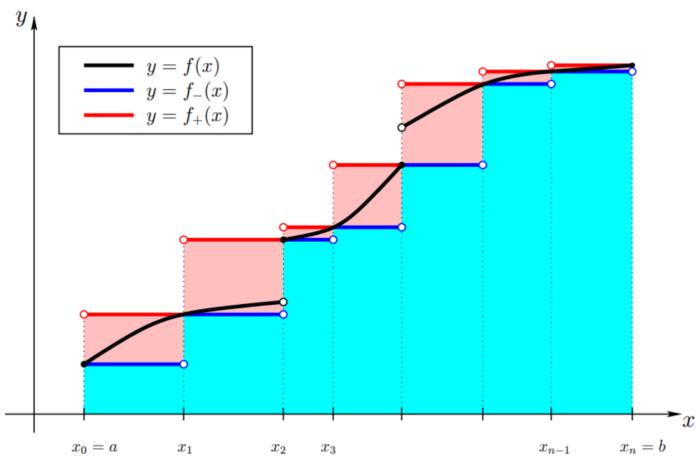
Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

8 Funciones Riemann Integrables

En esta sección veremos cómo la condición de Riemann permite demostrar que tanto las funciones monótonas en $[a, b]$ (no necesariamente continuas) y las funciones continuas en $[a, b]$, son ambas clases de funciones Riemann integrables.

Teorema 1 Toda función monótona en $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$.



Teorema 2 Toda función continua en $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$.

Observación En la demostración de ambos teoremas, se han usado las funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_-(x) = m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$f_+(x) = M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición. Con ellas se tiene que

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta x_i$$

$$\int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta x_i$$

que suelen llamarse suma inferior y suma superior de f asociadas a P, y se denotan respectivamente $s(f, P)$ y $S(f, P)$. Pues bien, en ambos casos (funciones monótonas y/o continuas) existe $\delta > 0$ de modo que si $|P| \leq \delta$ se obtiene $S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$. Estas sumas son interesantes, pero no tan fáciles de calcular, debido a las definiciones de m_i y M_i. Por este motivo muchas veces se suele usar la suma obtenida por la integración de una función escalonada intermediaria, la cual se define en cada intervalo (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_*(x) = f(s_i) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

donde los reales s_i son arbitrarios del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Claramente en este caso:

$$s(f, P) \leq \int_a^b f_* = \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta x_i \leq S(f, P)$$

La sumatoria intermedia se conoce como suma de Riemann. Como la integral de f también satisface la desigualdad

$$s(f, P) \leq \int_a^b f \leq S(f, P)$$

se concluye que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partición de } [a, b], |P| \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta x_i - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon$$

Esta propiedad es una de las motivaciones de la notación de Leibniz, entendiendo que la integral es el límite de una sumatoria, es decir:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta x_i.$$

En este límite la variable que tiende a cero es la norma de la partición P ($|P| \to 0$) y se calcula sobre las sumas de Riemann. Esto explica el uso del signo integral (especie de S alargada, como límite del signo sumatoria) y de la notación de Leibniz, donde el término denotado por $f(x)dx$ representaría al sumando $f(s_i)\Delta x_i$ en el proceso de límite.

8.1 Propiedades de la Integral

Teorema 3 (Linealidad). Si f, g son dos funciones Riemann integrables en el mismo intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función Riemann integrable en $[a, b]$ y se tiene

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Teorema 4 (Aditividad horizontal) Si f es una función definida y acotada en $[a,b]$ entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solamente si, para cada $c \in (a,b)$ arbitrario se tiene que f es Riemann integrable en ambos intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. En tal caso, se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 5 (Monotonía). La integral de una función Riemann integrable positiva en el intervalo $[a,b]$ es positiva; en consecuencia, si f,g son funciones Riemann integrables en $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Teorema 6 (Desigualdad triangular). Si f es una función Riemann integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es Riemann integrable en $[a,b]$ y se tiene que

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

En consecuencia, si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, se cumple

$$\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a).$$

8.2 Integral de a a b con $a \geq b$

Definición 1 Sea f una función integrable en un intervalo $[p,q]$. Si $a,b \in [p,q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \text{ si } a > b, \text{ o}$$

$$\int_a^b f = 0 \text{ si } a = b.$$

Proposición 1 Sean f y g integrales en $[p,q]$, y sean $a,b \in [p,q]$ entonces:

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [p,q].$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

4) $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

5) $\displaystyle 0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [p,q] \implies \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|.$

6) $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|.$