Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

7 Integral de Riemann

7.1 Introducción

La teoría de la integral de Riemann tiene un objetivo simple, que es: formalizar la noción de área mediante una definición que sea compatible con las ideas comunes e intuitivas acerca de este concepto.

Surge entonces la pregunta de ¿cuáles son estas ideas básicas? Por ejemplo, una de ellas es que el área de una superficie cuadrada de lado a sea a^2. Si esto es verdadero, se debe concluir que la superficie de un rectángulo de lados a y b es $a \cdot b$.

7.2 Condiciones básicas para una definición de área

Sea E un conjunto de puntos en el plano OXY . El área del conjunto E será un número real $A(E)$ que cumple las siguientes condiciones.

(A1) (Positividad) $A(E) \geq 0$

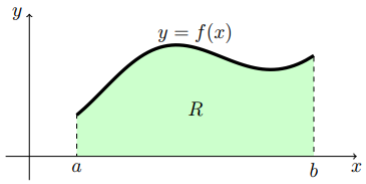
(A2) (Monotonía) $E \subseteq F \Longrightarrow A(E) \leq A(F)$

(A3) (Aditividad) Si $E \cap F = \emptyset \Longrightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$

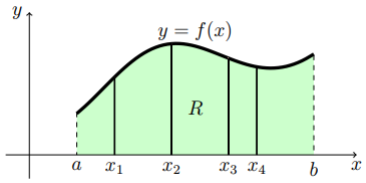
(A4) (Rectangularidad) El área de una región rectangular E de lados a y b es $A(E) = a \cdot b$.

Estas 4 condiciones son necesarias y suficientes para tener una buena definición de área. Se verá más adelante, en el transcurso del curso, que la integral de Riemann las satisface adecuadamente.

Observación Las cuatro propiedades elementales anteriores no son independientes entre sí, ya que por ejemplo (A2) es una consecuencia de (A1) y (A3). Mediante la integral de Riemann se definirá el área de una región E particular: Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ consideremos la región R limitada por el eje OX, la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El área de esta región se llamará área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b.



Por el momento, nos concentramos en la propiedad (A3), que sugiere dividir la región R en regiones más pequeñas. Por este motivo, el primer elemento que incorpora la definición de integral de Riemann es el concepto de partición, que sirve intuitivamente, para dividir la región R en bandas verticales, como se muestra en la figura:



Definición 1 (Partición de un intervalo). Una **partición** de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Se llama **norma** de la partición P al real definido por $|P| = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$.

7.3 Integración de funciones escalonadas

Definición 2 Diremos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **escalonada**, si existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que f es constante en cada intervalo abierto $(x_{i-1}, x_i), \forall i = 1, \ldots, n$.

Observación Las funciones escalonadas sólo toman un número finito de valores diferentes, que son: los valores $f(x_i)$ en los $n + 1$ puntos de la partición y los valores constantes c_i que toma en los n intervalos abiertos (x_{i-1}, x_i). Así resulta que toda función escalonada es **acotada**.

Observación Diremos que P es una partición asociada a f. Esta partición P no es única ya que al subdividir los intervalos de P, la función f todavía será constante en las subdivisiones que resulten. Por este motivo, antes de estudiar propiedades de estas funciones, conviene introducir el siguiente concepto:

Definición 3 Sean P, Q particiones de un mismo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Diremos que Q es un refinamiento de P, o que Q es más fina que P si se cumple que $P \subseteq Q$.

Observación Si P y Q son particiones cualesquiera, no siempre una es refinamiento de la otra, ya que el concepto de refinamiento NO está asociado directamente a la cantidad de puntos de una partición. Solo podemos decir que si Q es refinamiento

de P, entonces Q tiene una cantidad de puntos mayor o igual que P, pero el recíproco es falso. Sin embargo, dadas dos particiones arbitrarias P y Q, siempre existe un refinamiento común a ellas. En efecto, $P \cup Q$ es una partición (ordenando sus puntos de menor a mayor) que es refinamiento de P y de Q simultáneamente.

Definición 4 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función **escalonada**. Si para cada partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ asociada a f se calcula

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

donde f_i denota al valor constante de f en el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i). Entonces $I(f, P)$ no depende de P, es decir, es una cantidad que depende solamente de f.

Definición 5 Para cada función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **escalonada**, se define su integral de Riemann como

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

donde $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ designa cualquier partición asociada a f y f_i denota el valor constante de f en el correspondiente intervalo abierto (x_{i-1}, x_i).

Observación También se suele usar la notación de Leibniz $\int_a^b f(x)dx$.

Observación La integral de una función escalonada solo depende de los valores de f en los interiores de los intervalos de la partición y no de los valores de f en los bordes.

7.4 Propiedades de la integral de funciones escalonadas

Teorema 1 (Linealidad). Si f, g son dos funciones escalonadas en el mismo intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función escalonada en $[a, b]$ y se tiene

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Teorema 2 (Aditividad horizontal). Si f es una función escalonada en el intervalo $[a, b]$ (donde a < b) y si $c \in (a, b)$ es arbitrario. Entonces, f es una función escalonada en ambos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ y se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 3 (Monotonía). La integral de una función escalonada positiva en el intervalo $[a, b]$ es positiva. En consecuencia, si f, g son funciones escalonadas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

7.5 Funciones Riemann integrables

En esta sección, estudiaremos funciones que se les piden las siguientes condiciones: que se trate de una función bien definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ con $a < b$ y que sea acotada en dicho intervalo.

Teorema 4 Si f es una función definida y acotada en $[a, b]$ arbitraria, entonces se cumple que:

1. Los siguientes conjuntos son no vacíos:
   ∘ $\varepsilon_-(f)$ es el conjunto de todas las funciones escalonadas que minoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a, b], e(x) \leq f(x)$.
   ∘ $\varepsilon_+(f)$ es el conjunto de todas las funciones escalonadas que mayoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a, b], e(x) \geq f(x)$.

2. Siempre existen las cantidades

   $$I_-(f) = \sup \left\{ \int_a^b e : e \in \varepsilon_- \right\}, I_+(f) = \inf \left\{ \int_a^b e : e \in \varepsilon_+ \right\},$$

   llamadas integral inferior e integral superior de f en $[a, b]$ respectivamente.

3. Estas integrales verifican la desigualdad

   $$I_-(f) \leq I_+(f).$$

Cuando se cumple la igualdad, el cálculo resultante es muy útil y por eso se hace la siguiente definición:

Definición 6 Con las notaciones del teorema anterior, se dice que una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si se cumple la condición

$$I_-(f) = I_+(f).$$

Dicho número común se llama la integral de f en el intervalo $[a, b]$ y se le denota por

$$\int_a^b f \text{ , o bien, } \int_a^b f(x)dx \text{ (notación de Leibniz).}$$

Teorema 5 (Condición de Riemann). Una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si y solamente si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_- \in \varepsilon_-, f_+ \in \varepsilon_+, \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \varepsilon.$$