Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

6 Primitivas

Definición 1 (Primitiva). Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\operatorname{int}(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I ssi

$$\forall x \in \operatorname{int}(I), F'(x) = f(x).$$

Observación Dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante. Si F es una primitiva de f, entonces la función $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, es otra primitiva de f.

Observación El conjunto de todas las primitivas de f se anotará como $\int f$. Si F es una primitiva de f, entonces notaremos:

$$\int f = F + c.$$

Es habitual, usar la notación clásica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

donde dx corresponde a un símbolo que sirve para identificar a la variable.

6.1 Primitivas o integrales indefinidas inmediatas

A continuación se presentan algunas primitivas cuyo cálculo es elemental:

i) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ \forall n \neq -1.$

ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c = \ln(K|x|), \ K > 0.$

iii) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + c.$

iv) $\displaystyle\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + c.$

v) $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$

vi) $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)dx = \cosh(x) + c.$

vii) $\displaystyle\int \cosh(x)dx = \operatorname{senh}(x) + c.$

viii) $\displaystyle\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c.$

ix) $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = -\operatorname{cotan}(x) + c.$

x) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c.$

xi) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arc\,sen}(x) + c.$

xii) $\displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{1-x^2} + c.$

Observación 1. $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad \int f' = f + c.$

2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \quad \left(\int f\right)' = f.$

Proposición 1 $\displaystyle\int$ es un operador lineal, es decir:

1. $\displaystyle\int f \pm g = \int f \pm \int g.$

2. $\displaystyle\int \alpha f = \alpha \int f, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

6.2 Teorema de cambio de variable

Teorema 1 (Cambio de variable). Si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx$$

o, equivalentemente

$$\int f = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

6.3 Integración por partes

Proposición 2 (Fórmula de integración por partes). Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

o, equivalentemente

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'$$

Observación Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

donde $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$.

6.4 Sustituciones trigonométricas tradicionales

Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:

1. Para $a^2 + x^2$, usar $x = a\tan(v)$ o bien $x = a\,\mathrm{senh}(t)$.
2. Para $a^2 - x^2$, usar $x = a\,\mathrm{sen}(v)$ o bien $x = a\cos(v)$.
3. Para $x^2 - a^2$, usar $x = a\sec(v)$ o bien $x = a\cosh(t)$.

6.5 Integración de funciones racionales

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m(x-r_1)^{\alpha_1}\cdots(x-r_s)^{\alpha_s}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_tx+c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots, r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x-r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x-r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x-r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

6.6 Integrales trigonométricas reducibles a integrales de funciones racionales

Consideramos integrales del tipo

$$\int R(\mathrm{sen}(x), \cos(x))dx,$$

en donde R es una función racional en la cual aparecen sólo $\mathrm{sen}(x)$ y $\cos(x)$.

En estos casos se aconseja el cambio de variable:

$$t = \tan(x/2),$$

con lo cual

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx.$$

Pero por otra parte, $\arctan(t) = x/2$, de donde

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{2}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Usamos entonces unas conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de un ángulo doble, con lo que

$$\mathrm{sen}(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En resumen,

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \mathrm{sen}(x) = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right),$$

$$\cos(x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \quad dx = \left(\frac{2dt}{1+t^2}\right).$$