Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

5 Derivadas de mayor orden

5.1 Derivadas de orden superior

Observación Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

con la convención $f^{[0]}(x) = f(x)$. Notar que para que f tenga una derivada de orden k en $\bar{x}$, $f^{[k-1]}(x)$ debe existir al menos en un intervalo $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ y ser derivable en $\bar{x}$. Si f admite una derivada de orden k en todo punto de un intervalo (a,b), entonces $f^{[k-1]}$ (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a k) son continuas en (a,b). Diremos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es de clase $C^k(a,b)$ si es k veces derivable en todo punto del intervalo (a,b), y la función $f^{[k]}:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continua. Si esto es cierto para todo k, diremos que f es de clase C^∞.

5.2 Desarrollos limitados

Definición 1 Diremos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado de orden k en torno al punto $\bar{x}\in(a,b)$ si existen constantes $a_0,\dots,a_k\in\mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-\bar{x}) + a_2(x-\bar{x})^2 + \cdots + a_k(x-\bar{x})^k + o((x-\bar{x})^k)$$

con $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{o(u^k)}{u^k} = 0$.

Teorema 1 Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, k-veces derivable en $\bar{x}\in(a,b)$, y sea

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x-\bar{x}) + o((x-\bar{x})^k)$$

con $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h^k)}{h^k} = 0$.

5.3 Caracterización de puntos críticos

Proposición 1 Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, k veces derivable en $\bar{x}\in(a,b)$, con $f'(\bar{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ y $f^{[k]}\neq 0$, $k\geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:

a) Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un mínimo local.

b) Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un máximo local.

c) Si k es impar, $\bar{x}$ es un punto de inflexión.

5.4 Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

Teorema 2 Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x}\in(a,b)$. Entonces, para todo $x>\bar{x}$ (resp. $x<\bar{x}$) existe $\xi\in(\bar{x},x)$ (resp. $\xi\in(x,\bar{x})$) tal que

$$f(x) = T_f^k(x-\bar{x}) + \frac{f^{[k+1](\xi)}}{(k+1)!}(x-\bar{x})^{k+1}$$

5.5 El método de Newton

Consideremos la ecuación $f(x)=0$ donde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(a)f(b)<0$. En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución $x^*\in(a,b)$, la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia x^*, es relativamente lento.

Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución $x_0\sim x^*$. Si en la ecuación $f(x)=0$ reemplazamos la función $f(\cdot)$ por su aproximación afín en torno a x_0, obtenemos la ecuación lineal $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$. Si $f'(x_0)\neq 0$, la solución de esta ecuación linealizada es $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, la cual podemos considerar como una nueva aproximación de x^*, que esperamos sea más precisa.

La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

el cual estará definido mientras se tenga $f'(x_n)\neq 0$. Esta iteración se conoce como el Método de Newton (para ecuaciones).

Teorema 3 Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 y supongamos que $x^*\in(a,b)$ es una solución de la ecuación $f(x^*)=0$ tal que $f'(x^*)\neq 0$. Entonces existen constantes $\varepsilon>0$ y $M>0$ tales que para todo punto de partida $x_0\in I_\varepsilon := (x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon)$ el método de Newton está bien definido y converge hacia x^* con

$$|x_{n+1}-x^*| \leq M|x_n-x^*|^2.$$