Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

4 Derivadas: Los teoremas

4.1 Máximos y mínimos: la regla de Fermat

Definición 1 (Puntos extremos de una función). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, donde A es su dominio y $\bar{x} \in A$.

- Diremos que $\bar{x}$ es un punto *mínimo global* de f, si $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

  De manera análoga se define un punto *máximo global* de f.

- Diremos que $\bar{x}$ es un punto *mínimo local* de f, si $\exists \delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta].$$

  De manera análoga se define un punto *máximo local* de f.

Si se cumple cualquiera de los 4 casos, diremos que $\bar{x}$ es un punto extremo de la función f.

Teorema 1 Si $\bar{x} \in A$ es un punto extremo de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y f es derivable en $\bar{x}$ entonces $f'(\bar{x}) = 0$.

4.2 El teorema del valor medio

Teorema 2 (TVM). Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4.3 Algunas aplicaciones de la derivada

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada regla de l'Hôpital para el cálculo de límites de la forma $0/0$ o ∞/∞.

Teorema 3 (Regla de l'Hôpital). Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), tales que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista.

Observación La regla de l'Hôpital también se aplica para límites con $x \to a^-$, $x \to a$, e incluso para límites con $x \to \infty$ de la misma forma.

4.4 Derivadas y monotonía

Teorema 4 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.

4.5 Derivadas y convexidad

Definición 2 Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x) \qquad \forall x < z < y$$

o también

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Teorema 5 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ ssi f' es creciente en (a, b).

Observación Análogamente, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice cóncava si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de $-f$ y por lo tanto, en el caso diferenciable, a que f' sea decreciente.