Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

1 Subsucesiones y Continuidad

1.1 Subsucesiones

Definición 1 (Subsucesión). Sea (s_n) una sucesión. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de s_n generada por φ, a la sucesión (u_n), definida por:

$$u_n = s_{\varphi(n)}$$

Observación Aceptaremos que la función φ no esté definida para un número finito de términos.

Teorema 1 Sea (s_n) una sucesión y sea $l \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \to l \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } l$$

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

1.2 Funciones continuas

Definición 2 (Función continua en un punto). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \bar{x} \implies f(x_n) \to f(\bar{x})$$

Teorema 3 (Álgebra de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:

1. $f + g$.
2. $f - g$.
3. λf, con $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $f \cdot g$.
5. f/g, cuando $g(\bar{x}) \neq 0$.

Teorema 4 (Composición de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.

Teorema 5 (Caracterización ε - δ). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ ssi se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \{|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon\}$$

Observación Con esta propiedad, podemos establecer la conexión entre continuidad y límite de funciones, si el dominio de la función permite estudiar el límite de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ y $\bar{x} \in A$ se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ ssi } \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Definición 3 (Función continua). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.

Observación Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que existe una constante $L \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in A$ (una función con estas características se le dice Lipschitziana de parámetro L).

2 Continuidad. Los grandes teoremas

2.1 El teorema de los valores intermedios

Teorema 6 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Como corolario inmediato del teorema anterior, se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

Teorema 7 (TVI). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.

2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

Teorema 8 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y máximo en $[a, b]$.

2.3 Continuidad de las funciones inversas

Teorema 9 Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.

2.4 Continuidad uniforme

Ya vimos la noción de continuidad en términos de sucesiones, y usando la caracterización ε - δ. Vale la pena notar que en general δ depende de ε y del punto $\bar{x}$, es decir, $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x})$. Veamos ahora que para ciertas funciones es posible encontrar $\delta > 0$ que satisface la propiedad ε - δ independientemente del punto $\bar{x}$ en consideración:

Definición 4 La función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A), |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Observación Una función uniformemente continua resulta ser continua en todo su dominio, es decir, siempre se tiene que

$$f \text{ es función uniformemente continua } \Longrightarrow f \text{ es función continua.}$$

Veamos condiciones para obtener la recíproca:

Teorema 10 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.