Resumen Auxiliar 13
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡

Definición (Punto de Acumulación) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ (con valores en A) tal que $x_n \neq \overline{x}$, $\forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \to \overline{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A'.

Definición Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\overline{x} \in A'$, es decir $\overline{x}$ es un punto de acumulación de A. Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\overline{x}$ (lo cual se denotará $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \overline{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \to \overline{x}$ (lo que se anota $\ell = \lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A, convergente a $\overline{x}$ y tal que $x_n \neq \overline{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a ℓ.

Teorema 12.1. *Si una función f tiene límite cuando $x \to \overline{x}$ entonces dicho límite es único.*

Definición Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\overline{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\overline{x}$ a $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^+}} f(x)$.

ii) Análogamente, a $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\overline{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x > \overline{x}}} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to \overline{x}^+} f(x)$ y el limite lateral por la izquierda se denota por $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x < \overline{x}}} f(x)$ o bien por $\lim\limits_{x \to \overline{x}^-} f(x)$.

Teorema 12.6 (Caracterización ε-δ de límite). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x}$ punto de acumulación de A entonces*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap ([\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Resumen Auxiliar Extra C6

Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024

Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$ entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La frase $\forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}$ que aparece en la caracterización, suele ser escrita usando una implicancia. De este modo se escriben:

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A\ \Big[0 < |x - \overline{x}| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\Big].$$

Definición Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea ℓ un real fijo.

i) Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

ii) Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Definición (Asíntotas horizontales)

1. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f.
2. Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ es otra asíntota horizontal de f.

Definición (Límites igual a $+\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si $\overline{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta], f(x) \geq M.$$

2. Si $\overline{x}$ es punto de acumuluación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$, entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta], \quad f(x) \geq M.$$

3. Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x}), \quad f(x) \geq M.$$

4. Si A no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad f(x) \geq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad f(x) \geq M.$$

Definición (Asíntotas verticales) Si $\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \overline{x}$ es una asíntota vertical de f.

Definición (Asíntotas oblicuas)

1. La recta $y = m_1 x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to +\infty$ si se cumple que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (m_1 x + n_1) = 0.$$
2. Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (m_2 x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2 x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to -\infty$.