



Preparación Examen

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalcios J.
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

Examen Semestre Verano 2023

P1.

Sea g la función dada por $g(x) = \exp\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

1. Determine el dominio de g .
2. Si f es la restricción de g a $[0, +\infty)$, determine el recorrido de f .
3. ¿La función f posee inversa?

P2.

a) Considere la siguiente sucesión definida de manera recursiva:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + 3a_n} - 1, \quad \forall n \geq 0.$$

1. Demuestre que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es positiva y acotada superiormente por 1.
2. Demuestre que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.
3. Concluya que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge y encuentre su límite.
4. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1}.$$

b) Determine las soluciones de la siguiente ecuación: $\log_{1/2}\left(x^{\log_{1/2}(x)-2}\right) = 3$.

P3.

Calcule cuatro de los siguientes límites:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^4}{n^3+1} - \frac{n^3}{n^2+n+1} \right)$.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} + 4^{n+1}}{2^n + 4^n}$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)^{n^2}$.

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+8+27+\dots+n^3}{n^4}$.

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{a+n} - \sqrt{n} \right)$, $a > 0$.

Examen Semestre Otoño 2024

P1.

a) Resuelva la ecuación trigonométrica:

$$2 \sin(2x) - 3 \sin(x) = 0.$$

b) Muestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\sin(10x)}{\sin(x) + \sin(9x)} = \frac{\cos(5x)}{\cos(4x)}.$$

Hint: Notar que $\sin(x) = \sin(5x - 4x)$ y $\sin(9x) = \sin(5x + 4x)$.

c) Considere la sucesión:

$$a_n := \exp\left(\sqrt[n]{n \ln(n) + 2 \cos^2(n)}\right), \quad n \geq 1.$$

Decida si la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

P2.

a) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}, & x > 0, \\ \frac{\sqrt{8+e^x-3}}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

Examine si existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} x(\sqrt[3]{3} - 1), & x > 0, \\ \frac{2x^3}{x^2-4} + \exp\left(\frac{1-\sin(x)}{x}\right), & x \leq 0. \end{cases}$$

Halle, si existen, las asíntotas de la función g .