Auxiliar 13: Sucesiones III

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalacios J.
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Considere las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

a) Determine para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, sus límites

b) Demuestre que, si $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ y $(a_n - b_n) \to 0$, entonces $b_n \to 0$

c) Demuestre que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

P2. Matraca

Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n+n^5}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5n} - \frac{n^{100}\cos(n!)}{(1.01)^n}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}}\right)^n$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3a^n - nb^n}{n^5a^n + \sqrt{n^2+1}b^n}, \quad 0 < a < b$

Puede utilizar que:

- Si $q \in (-1,1)$, entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n = 0$,
- Si $q \in (-1,1)$, entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$, para k natural

Resumen Auxiliar 13: Sucesiones III
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Auxiliar Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una sucesión real es una función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \to \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Teorema 9.1. *Si (s_n) es una sucesión que converge a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.*

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ, entonces ℓ se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_n s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NULA) (s_n) se llamará sucesión nula si $s_n \to 0$.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA) (s_n) se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n| \leq M.$$

Teorema 9.2. *Sean (u_n), (v_n) sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas*

1. *(u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.*
2. *Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.*
3. *Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.*
4. *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.*
5. *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces (u_n+v_n) y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.*
6. *Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.*

Resumen Auxiliar 13: Sucesiones III
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Auxiliar Ignacio Dagach Abugattas

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.
- $$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$
  para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
  - si $p < q$, entonces $s_n \to 0$
  - si $p = q$, entonces $s_n \to \frac{a_p}{b_q}$
  - si $p > q$, entonces $\left(\frac{1}{s_n}\right) \to 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge.
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

Propiedad 11.
1. *$\lim q^n = 1$, si $q = 1$.*
2. *$\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$.*
3. *$\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.*

Si $q \in (-1,1)$, entonces, $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$, para k natural

Proposición 9.1. *Sea (s_n) una sucesión de números reales entonces $s_n \to \ell \iff (s_n - \ell)$ es una sucesión nula.*

Proposición 9.2. *Sea (s_n) una sucesión de números reales. Si (s_n) es convergente entonces (s_n) es acotada.*

Proposición 9.3 (Álgebra de límites). *Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v, respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ y (λu_n) son también convergentes a $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ y λu, respectivamente.*

Es decir, si $u_n \to u$ y $v_n \to v$ entonces:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$.

Proposición 9.4. *Si (s_n) es una sucesión nula entonces la sucesión $(\frac{1}{s_n})$, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.*

Proposición 9.6. *Sea (s_n) una sucesión real. Si (s_n) converge a $\ell \neq 0$ entonces:*

(1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ tal que s_n tiene el mismo signo de ℓ (es decir $s_n \cdot \ell > 0$).

(2) La sucesión $(\frac{1}{s_n})$ es acotada.

Proposición 9.7. *Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente. Si $v \neq 0$, la sucesión (u_n / v_n) es convergente a (u/v).*

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$