Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 11: Sucesiones

Recomendación: ver videos del semestre pasado, hay mucho material, links acá: https://www.youtube.com/@Nacho0307/playlists (pd: hay resumen de toda la materia)

P1. Para comenzar

Considere $\gamma \in \mathbb{R}_+$ y las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sqrt{n + \frac{\gamma}{n}} - \sqrt{n}$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \sqrt{5 + |a_n|\cos^2(1+\sqrt{2}n) + \sin(a_n + \sqrt{3}n)}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = (\sqrt{n + \frac{\gamma}{n}} - \sqrt{n})b_n^3$

a) Determine para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite

b) Demuestre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula

Pauta P1: Aux 11 semestre pasado, ver siguiente enlace
https://www.youtube.com/watch?v=dPTqxJVwu4M&t=343s minuto 16:57
Nota: En el video se realiza para \gamma = 1, sin embargo esto puede generalizarse a todo \gamma real positivo pues:

- n + gamma/n > n, para todo n natural
- existe un epsilon > 0 tal que para todo n mayor que algun n_0, gamma/n < epsilon, (basta tomar el epsilon de la P.A. y dividirlo por gamma)

Pauta P2: Aux 9 semestre pasado, ver siguiente enlace
https://www.youtube.com/watch?v=YYjDD4idvqo&t=508s desde el minuto 1:02:08
En particular:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$$

P2.a
Pauta: https://www.youtube.com/watch?v=YYjDD4idvqo&t=508s minuto 1:02:08

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}}\right)$$

P2.c
Pauta: https://www.youtube.com/watch?v=YYjDD4idvqo&t=508s minuto 1:10:04

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$$

P2.d
Pauta: https://www.youtube.com/watch?v=YYjDD4idvqo&t=508s minuto 1:16:00

$$\text{e) } \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$$

P2.e
Pauta: https://www.youtube.com/watch?v=YYjDD4idvqo&t=508s minuto 1:26:25

Ignacio Dagach Abugattas

Pauta P2.b

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

PAUTA P2 b)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}$,

NOTAR que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

luego $1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

y con lo anterior

$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq \sqrt[n]{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

y como $1^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1} \longrightarrow 1$

$3^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{3} \longrightarrow 1$, si $n \to \infty$,

POR sandwich

$\sqrt[n]{2+(-1)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 11: Sucesiones

Pauta P2.f

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(24e^{n!}\right)}{n}$

PAUTA P2 f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(24e^{n!})}{n}$$

Notar que $-1 \leq \cos(\cdot) \leq 1$,

luego

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(24e^{n!})}{n} \leq \frac{1}{n}$$

y como $\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

por sandwich,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(24e^{n!})}{n} = 0.$$

Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 11: Sucesiones

Pauta P3

Considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia $x_{n+1} := \sqrt{\dfrac{8+x_n^2}{3}}$, $\quad x_0 = 10$.

a) Demuestre que $x_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$

b) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona

c) Concluya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcule su límite

P3.a

(a) **(2.0 pts)** Muestre que $x_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución

Por inducción:

- **Caso base:** Para $n = 0$, $x_0 = 10 \geq 2$. También puede tomarse como caso base $n = 1$ $x_1 = \sqrt{\frac{8+10^2}{3}} = 6 \geq 2$. 0.5
- **Hipótesis de inducción (H.I.):** Supongamos que para $n = k$ se verifica que $x_k \geq 2$. 0.5
- Suponiendo cierta **(H.I.)**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{\frac{8+x_k^2}{3}} \\ &\geq \sqrt{\frac{8+(2)^2}{3}}, \quad \textbf{(H.I.)} \\ &= \sqrt{4} = 2, \end{aligned}$$

lo que prueba que $x_{k+1} \geq 2$, luego el resultado se sigue por el principio de inducción. 1.0

Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 11: Sucesiones

P3.b

1.0

(b) **(2.0 pts)** Muestre que (x_n) es monótona.

Solución 1

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}}{x_n} = \sqrt{\frac{8}{3x_n^2} + \frac{1}{3}},$$

0.5

como $x_n \geq 2 > 0$ entonces $x_n^2 \geq 4$, así $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{x_n^2}$, luego

$$\frac{2}{3} \geq \frac{8}{3x_n^2} \iff \frac{8}{3x_n^2} \leq \frac{2}{3},$$

0.5

entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{8}{3x_n^2} + \frac{1}{3}} \leq \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 1.$$

0.5

Concluimos que $x_{n+1} \leq x_n$, así que (x_n) es decreciente. 0.5

Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 11: Sucesiones

P3.c

(c) **(2.0 pts)** Usando lo anterior concluya que (x_n) converge y calcule su límite. 0.5

Solución Dado que la sucesión (x_n) es decreciente y acotada inferiormente entonces converge. 0.5

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}},$$

entonces

$$\ell = \sqrt{\frac{8+\ell^2}{3}},$$

0.5

luego

$$\ell^2 = \frac{8+\ell^2}{3},$$

por tanto $\ell^2 = 4$, luego $\ell = 2$ ó $\ell = -2$, esta última solución se descarta pues $x_n \geq 2$ así que $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 2$. 0.5

Finalmente, concluimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. 0.5