

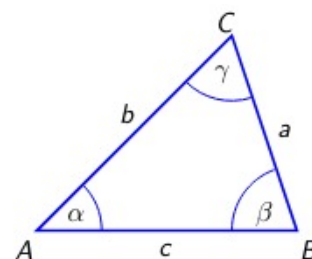
Auxiliar 9: Trigonometría III

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalcacios J.
 Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- $4\sin(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2}) = 3$
- $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$
- $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$
- $(1 - \tan(x))(\sin(2x) + 1) = 1 + \tan(x)$



P2. Matraca

Considere el triángulo T visto en P1 de área A y demuestre que:

- $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos(\gamma) + 2accos(\beta) + 2bccos(\alpha)$
- Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \frac{1}{2}Kabc$

P3. De controles

Considere el triángulo T visto en P1 y demuestre que:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{a} \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2c} - \frac{\sin(\beta)}{b} \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}}{\frac{\sin(\alpha)}{a} \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2c} + \frac{\sin(\beta)}{b} \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}}$$

y utilícelo para concluir que:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$



$$\cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sen^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

■ [Funciones recíprocas]: Se definen

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sen(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sen(x)}$$

■ [Propiedad]:

- Si $\cos(x) \neq 0$, entonces $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$
- Si $\sen(x) \neq 0$, entonces $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$

■ [Propiedad suma y diferencia de ángulos]

$$\sen(\alpha \pm \beta) = \sen(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sen(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sen(\alpha)\sen(\beta)$$

■ [Regla de los cuadrantes]:

- $\sen(\pi \pm \alpha) = \mp \sen(\alpha)$
- $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \sen(\alpha)$
- $\sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$

■ [Algunas identidades útiles]:

1. $\sen(2x) = 2\sen(x)\cos(x)$
2. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sen^2(x)$
3. $\sen(x) \pm \sen(y) = 2\sen(\frac{x \pm y}{2})\cos(\frac{x \mp y}{2})$

Teorema 7.1 (Teorema del Seno).

$$\frac{\sen \alpha}{a} = \frac{\sen \beta}{b} = \frac{\sen \gamma}{c} = k$$

Teorema 7.2 (Teorema del Coseno).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

DEFINICIÓN (ARCOSENO) Llamamos arcoseno a la función inversa de $f(x) = \cos x$, o sea:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

tal que

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

DEFINICIÓN (ARCOSENO) Llamamos arcoseno a la función inversa de $f(x) = \sen x$, es decir:

$$\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

tal que

$$y = \arcsen x \iff x = \sen y$$

DEFINICIÓN (ARCOTANGENTE) Llamamos arcotangente a la función inversa de f , o sea:

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

tal que

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

Consideremos la ecuación $\sen x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

- a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.
- b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \arcsin a$.

Sin embargo como la función $\sen$ no es epiyectiva, esta solución no es única.

La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = k\pi + (-1)^k \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de $\sen$.

Consideremos la ecuación $\cos x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

- a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.
- b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \arccos a$.

Sin embargo como la función $\cos$ no es epiyectiva, esta solución no es única.

La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de $\cos$.

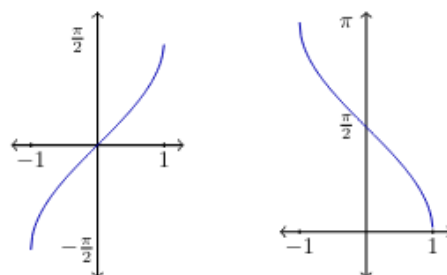
Consideremos la ecuación $\tan x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, que corresponde a $\alpha = \arctan a$.

Sin embargo como la función $\tan$ no es epiyectiva, esta no es la única solución.

La solución general suele escribirse en la ecuación

$$x = k\pi + \alpha \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$



Gráficos de arcoseno y arcocoseno.

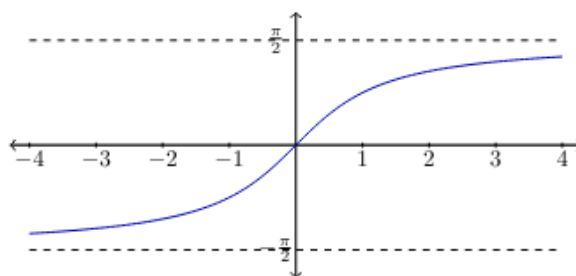


Gráfico de arcotangente.