

PAUTA AUXILIAR 7

INTRODUCCIÓN al Cálculo S3

~~Guillermo~~ Primavera 2024
Gnadio Dagach Nuygattas

P1. Para comenzar

Determine, según corresponda, asíntotas verticales, horizontales y dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2-1}$

b) $g(x) = \frac{6x^2+18x-60}{x^2-6x+8}$

NOTAR que:

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2-1}$$

$$= \frac{-(x^2-3x+2)}{x^2-1}$$

$$= \frac{-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{6x^2+18x-60}{x^2-6x+8}$$

$$= \frac{6(x^2+3x-10)}{x^2-6x+8}$$

$$= \frac{6(x+5)(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

NOTAR que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $g(x) = \frac{P'(x)}{Q'(x)}$

donde P, P', Q, Q' son funciones polinómicas del mismo grado, por tanto las asíntotas horizontales para estos serán

PARA f , la recta $y = \frac{a_n}{b_n} = \frac{-1}{1} = -1$

PARA g , la recta $y = \frac{a'_n}{b'_n} = \frac{6}{1} = 6$.

los dominios serán el lugar geométrico donde nuestras funciones tienen sentido (NO se indeterminan)
 $\Rightarrow$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$$

las asíntotas verticales serán los ceros exclusivos del denominador de cada función

ie. (ceros de Denom. pero NO Numerador)

las asíntotas verticales serán:

PARA f : la recta $x = -1$

PARA g : la recta $x = 4$

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2-1}$$

$$= \frac{-(x^2-3x+2)}{x^2-1}$$

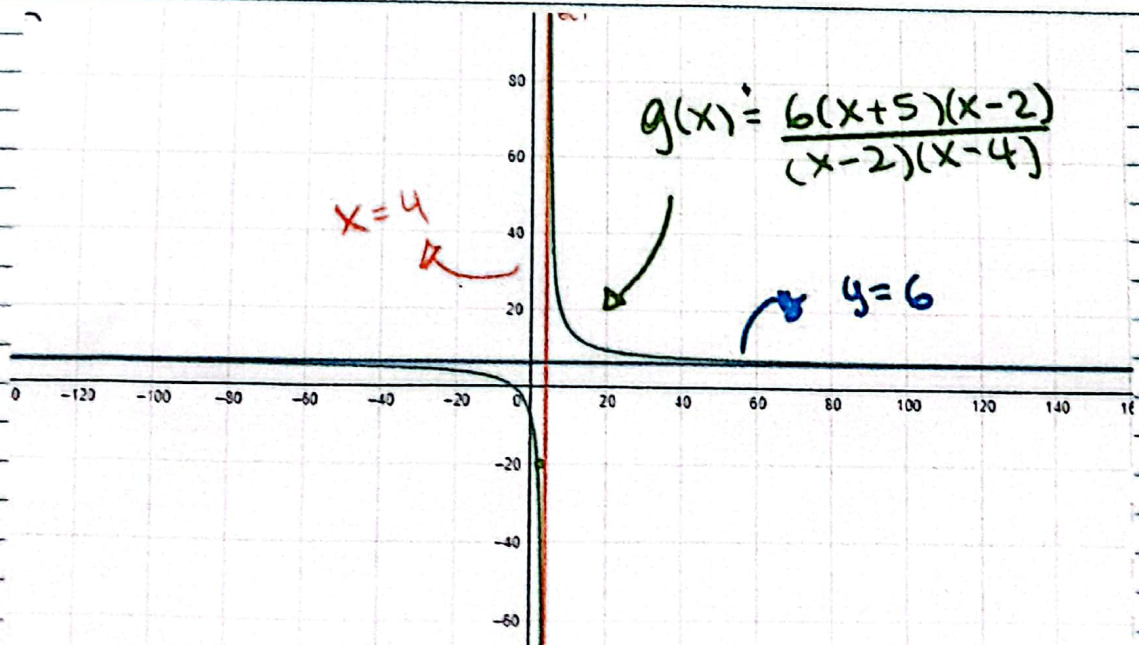
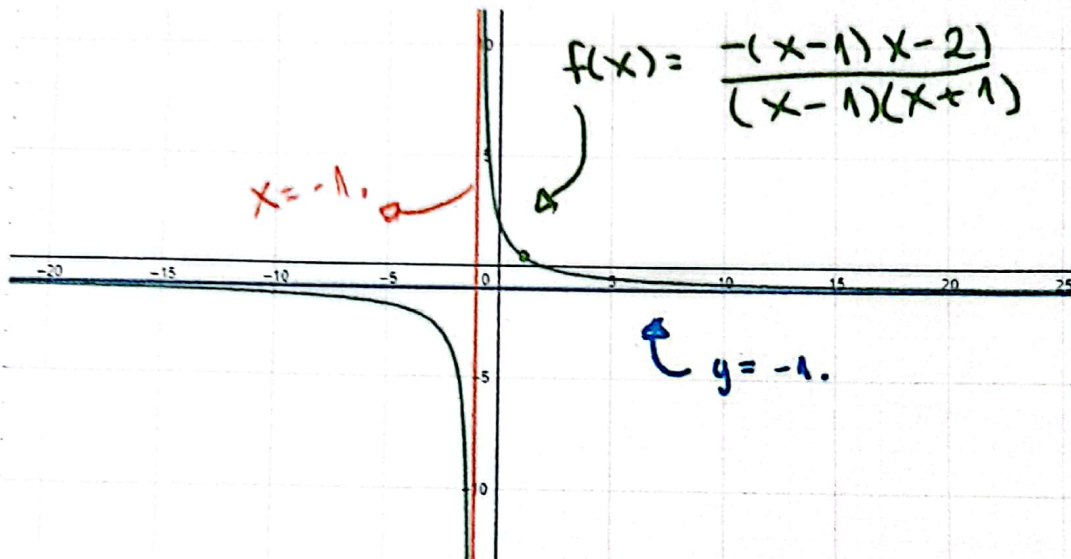
$$= \frac{-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{6x^2+18x-60}{x^2-6x+8}$$

$$= \frac{6(x^2+3x-10)}{x^2-6x+8}$$

$$= \frac{6(x+5)(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

Gráfico de geogebra en sig. página 😊



6

DOM?? todo menos donde f se indetermina

$$\Rightarrow \text{DOM}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x : 1 - |x| = 0\} \\ = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

• Ceros $\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1-|x|} = 0\}$

Pero $\frac{|x|}{1-|x|} = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \text{ceros}(f) = \{0\}$$

• PARIDAD $f(-x) = \frac{1-|x|}{1-|-x|} = \frac{|x|}{1-|x|} = f(x)$
 $\hookrightarrow$ PAR

• SIGNOS $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{|x|}{1-|x|} > 0$

pero $\frac{|x|}{1-|x|} > 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x|, 1-|x| > 0 & \vee & |x|, 1-|x| < 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \text{CASO 1} & \vee & \text{CASO 2} \end{pmatrix}$$

CASO 1 $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$

$$1-|x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{CASO 1} = (-1, 0) \cup (0, 1).$$

CASO 2 $|x| < 0 \Leftrightarrow F \Rightarrow \text{CASO 2} = \emptyset$

$$\Rightarrow f > 0 \text{ si } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \emptyset = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$f < 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus (\text{ceros}(f) \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\})$$

$$\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup (-1, 0) \cup (0, 1))$$

$$\Rightarrow f < 0 \text{ en } (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

ii) crecimiento, como f es par veamos crecimiento en el $[0, \infty)$

sean $x_1, x_2 \in \text{DOM}(f)$ tq $0 \leq x_1 < x_2$

veamos $f(x_1) - f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_1|}{1-|x_1|} - \frac{|x_2|}{1-x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_1| - |x_1||x_2| - |x_2| + |x_1||x_2|}{(1-|x_1|)(1-|x_2|)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_1| - |x_2|}{(1-|x_1|)(1-|x_2|)}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$\Rightarrow$ como $x_2 > x_1$, $x_1 - x_2 < 0$.

luego $f(x_1) - f(x_2) < 0$ si $(1-x_1)(1-x_2) > 0$

$$\Leftrightarrow (1-x_1), (1-x_2) > 0 \vee (1-x_1), (1-x_2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x_1, x_2 \in [0, 1) \vee x_1, x_2 \in (1, \infty)$$

$\Rightarrow$ en el $[0, 1) \cup (1, \infty)$ f es estricta creciente

paridad en el $(-\infty, 1) \cup (-1, 0]$
es estricta decreciente.

$$\underline{\underline{\text{Im}(f)}} = \{y \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists x \in \text{DOM}(f) \text{ tq } f(x) = y\}$$

$\Rightarrow$ sea $y \in \mathbb{R}$ veamos que podemos imponer sobre y PARA que exista un x tq $f(x) = y$

$\Rightarrow$ si $\exists x \in \text{DOM}(f) \text{ tq } f(x) = y$

$$\frac{|x|}{1-|x|} = y \Leftrightarrow |x| = y(1-|x|)$$

$$\Leftrightarrow |x| = y - y|x|$$

$$\Leftrightarrow |x|(1+y) = y$$

$\Rightarrow$ CLARAMENTE $y \neq -1$ pues
de lo CONTRARIO $|x|(1+(-1)) = -1$

$$0 = -1 \times$$

$$\Rightarrow y \neq -1$$

$\Rightarrow$ podemos dividir

$$\Rightarrow |x| = \frac{y}{1+y} \Rightarrow \text{como } |x| \geq 0$$

queremos que $\frac{y}{1+y} \geq 0$

$$\text{ero } \frac{y}{1+y} \geq 0 \Leftrightarrow y, 1+y \geq 0 \quad \vee \quad y, 1+y \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\text{CASO 1}}} \quad \vee \quad \underline{\underline{\text{CASO 2}}}$$

CASO 1

$$y \geq 0 \wedge 1+y \geq 0$$

$$\underline{\text{CASO 1}} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

CASO 2

$$y \leq 0 \wedge 1+y \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\text{CASO 2}} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1\}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1+y} \geq 0 \Leftrightarrow y \in \text{CASO 1} \cup \text{CASO 2}$$
$$y \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

Pero y debe ser $\neq -1$

$$\Rightarrow \text{im}(f) = [(-\infty, -1] \cup [0, \infty)) \setminus \{-1\}$$
$$= (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$

ASINTOTAS,

COMO en $[0, \infty)$ y en $(-\infty, 0)$

f se ve COMO DIVISIÓN de
POLINOMIOS podemos
APLICAR teo del residuo.

$\Rightarrow$

AH $a + \infty$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \text{ PARA } x \geq 0 \text{ grande}$$

COMO tienen mismo GRADO num y
den AH $a + \infty$ es $y = \frac{1}{-1} = -1$

AH $a - \infty$

$$f(x) = \frac{-x}{1+x} \text{ PARA } x < 0,$$

análogamente, AH $a - \infty$ es $y = \frac{-1}{1} = -1$

(o usar paridad ☺)

AV en $[0, \infty)$ BUSAMOS CEROS del
denominador pero NO del NUMERADOR

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \text{ en } [0, \infty) \Rightarrow \text{AV en } [0, \infty) \text{ es } x = 1.$$

igualmente en $(-\infty, 0)$, $f(x) = \frac{-x}{1+x}$,
 $\Rightarrow$ AV en $(-\infty, 0)$ es $y = -1$
(O USAR PARIDAD $\cup$)

IV) sean $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ tq $f(x_1) = f(x_2)$

PDQ $x_1 = x_2$

Como $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{|x_1|}{1-|x_1|} = \frac{|x_2|}{1-|x_2|}$$

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}$$

$\hookrightarrow x_1, x_2 \geq 0$

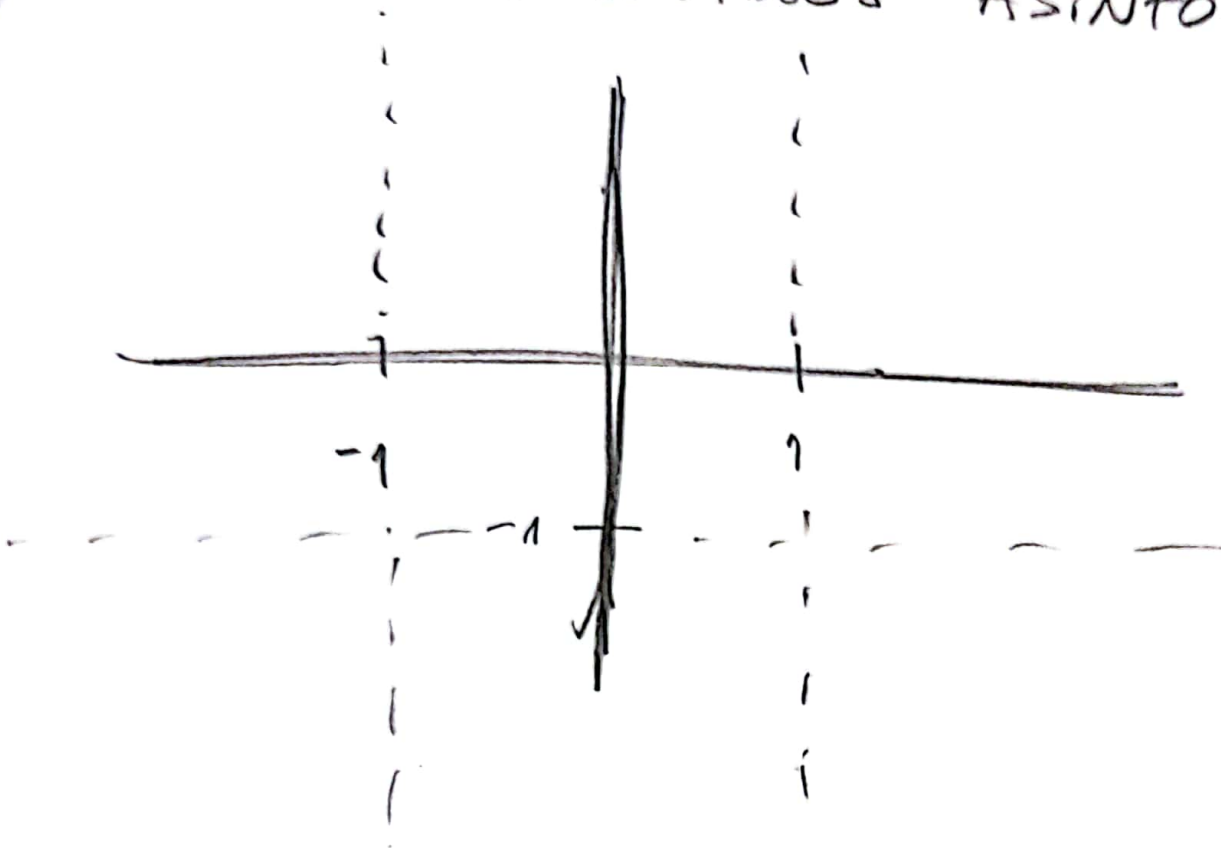
$$x_1 - x_1 x_2 = x_2 - x_1 x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

(ANÁLIGO en $(-\infty, -1)$).

gráfico

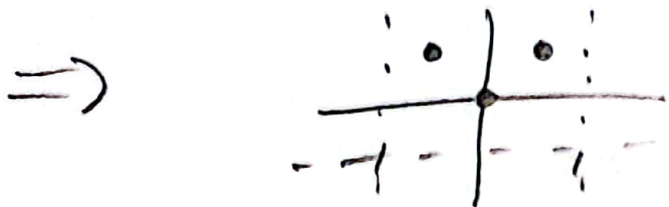
Primero colocamos ASÍNTOTAS



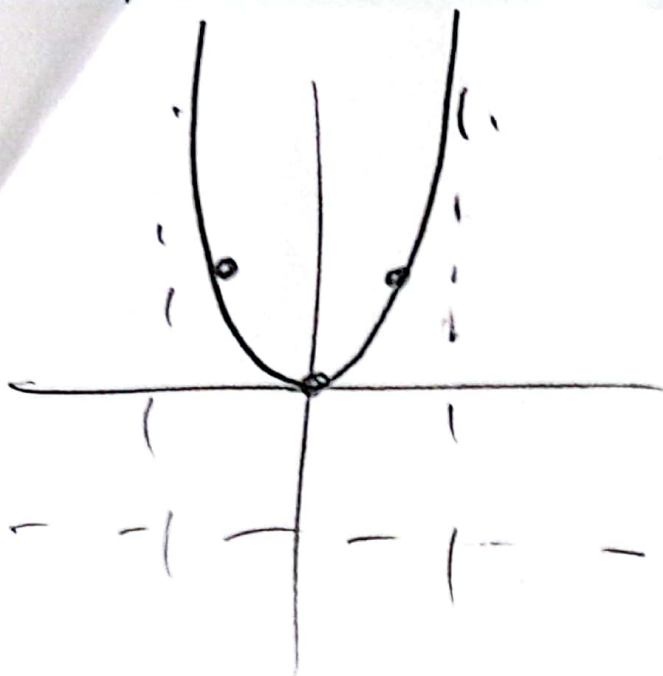
después agregamos los 0's



Agregamos PUNTOS INTERESANTES ^{f par}
 Por ejemplo $x = 0,5 \Rightarrow f(x) = \frac{0,5}{0,5} = f(-x)$



como en $(-1, 0) \cup (0, 1)$
 f es > 0 + ASÍNTOTAS



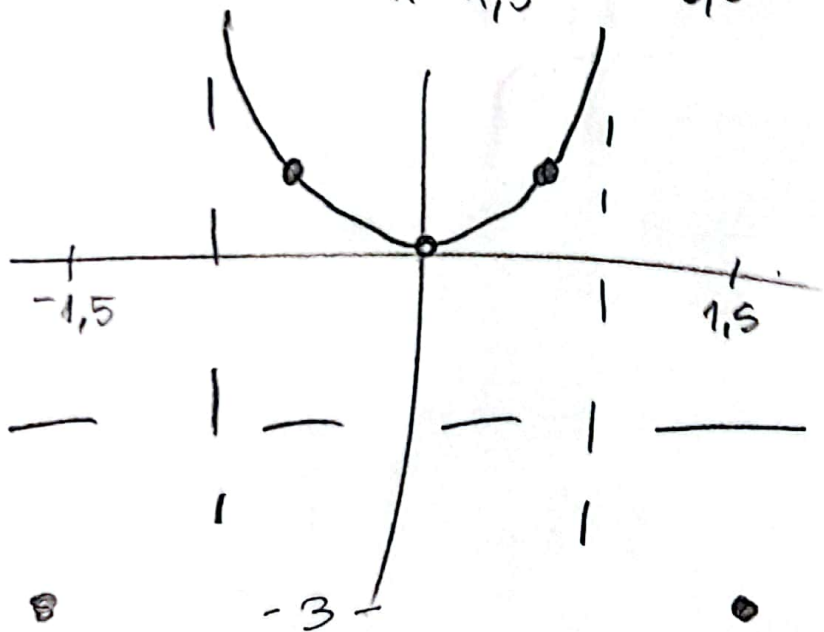
podemos
agregar esa
línea

Otro punto interesante sería el

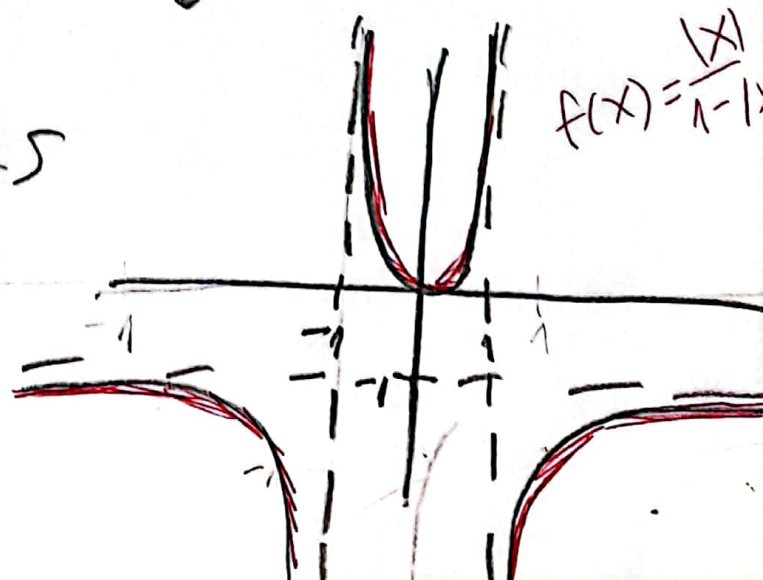
$$x=1,5 \Rightarrow f(x) = \frac{1,5}{1-1,5} = \frac{1,5}{-0,5} = -3 = f(-x)$$

$\Rightarrow$

$\hookrightarrow f$ par



$\Rightarrow$ USANDO ASÍNTOTAS



Pauta AUX 3

25

1 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

dem: Usamos la suma de ángulos

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 \\ &= -\sin(x) \quad \parallel\end{aligned}$$

2 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

dem: Usamos la suma de ángulos

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\ &= \cos(x) \quad \parallel\end{aligned}$$

3 $\cotan(x) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$

dem:

def. de tan(x)

$$\tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

usamos parte 1 y 2

$$= \frac{\cos(-x)}{-\sin(-x)}$$

cos es par y
sen es impar

$$= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cotan(x)$$

def. de cotangente $\parallel$

4 p.d.q: $(\forall x \in \mathbb{R}) \sin^4(x) + 4\cos^2(x) = (1 + \cos^2(x))^2$

dem: Veamos que,

$$\begin{aligned}(1 + \cos^2(x))^2 &\quad \text{Cuadrado de binomio} \\ &= 1 + 2\cos^2(x) + \cos^2(x)\cos^2(x) \\ &= 1 + 2\cos^2(x) + \cos^2(x)(1 - \sin^2(x)) \quad \text{Id. Fundamental} \\ &= 1 + 2\cos^2(x) + \cos^2(x) - \cos^2(x)\sin^2(x) \\ &= 1 + 3\cos^2(x) - \cos^2(x)\sin^2(x) \quad \text{Id. Fundamental} \\ &= 1 + 3\cos^2(x) - (1 - \sin^2(x))\sin^2(x) \\ &= 1 + 3\cos^2(x) - \sin^2(x) + \sin^4(x) \\ &= (1 - \sin^2(x)) + 3\cos^2(x) + \sin^4(x) \quad \text{Id. Fundamental} \\ &= \cos^2(x) + 3\cos^2(x) + \sin^4(x) \\ &= 4\cos^2(x) + \sin^4(x) \\ &= \sin^4(x) + 4\cos^2(x)\end{aligned}$$

$$\therefore (1 + \cos^2(x))^2 = \sin^4(x) + 4\cos^2(x) \quad \parallel$$

5 p.d.q: $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \cos^2(y) - \sin^2(x) = \cos(x-y)\cos(x+y)$

dem: En efecto,

$$\begin{aligned}\cos(x-y)\cos(x+y) &= (\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y))(\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) \quad \text{Suma por su diferencia} \\ &= \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)\sin^2(y) \\ &= (1 - \sin^2(x))\cos^2(y) - \sin^2(x)\sin^2(y) \\ &= \cos^2(y) - \sin^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)\sin^2(y) \\ &= \cos^2(y) - \sin^2(x)(\cos^2(y) + \sin^2(y)) \\ &= \cos^2(y) - \sin^2(x) \cdot 1 \\ &= \cos^2(y) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\therefore \cos(x-y)\cos(x+y) = \cos^2(y) - \sin^2(x) \quad \parallel$$

f) pdg: $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (\cos(x+y) = 0 \Rightarrow \sin(x+2y) = \sin(x))$

dem:

Queremos demostrar que: $\sin(x+2y) = \sin(x)$.

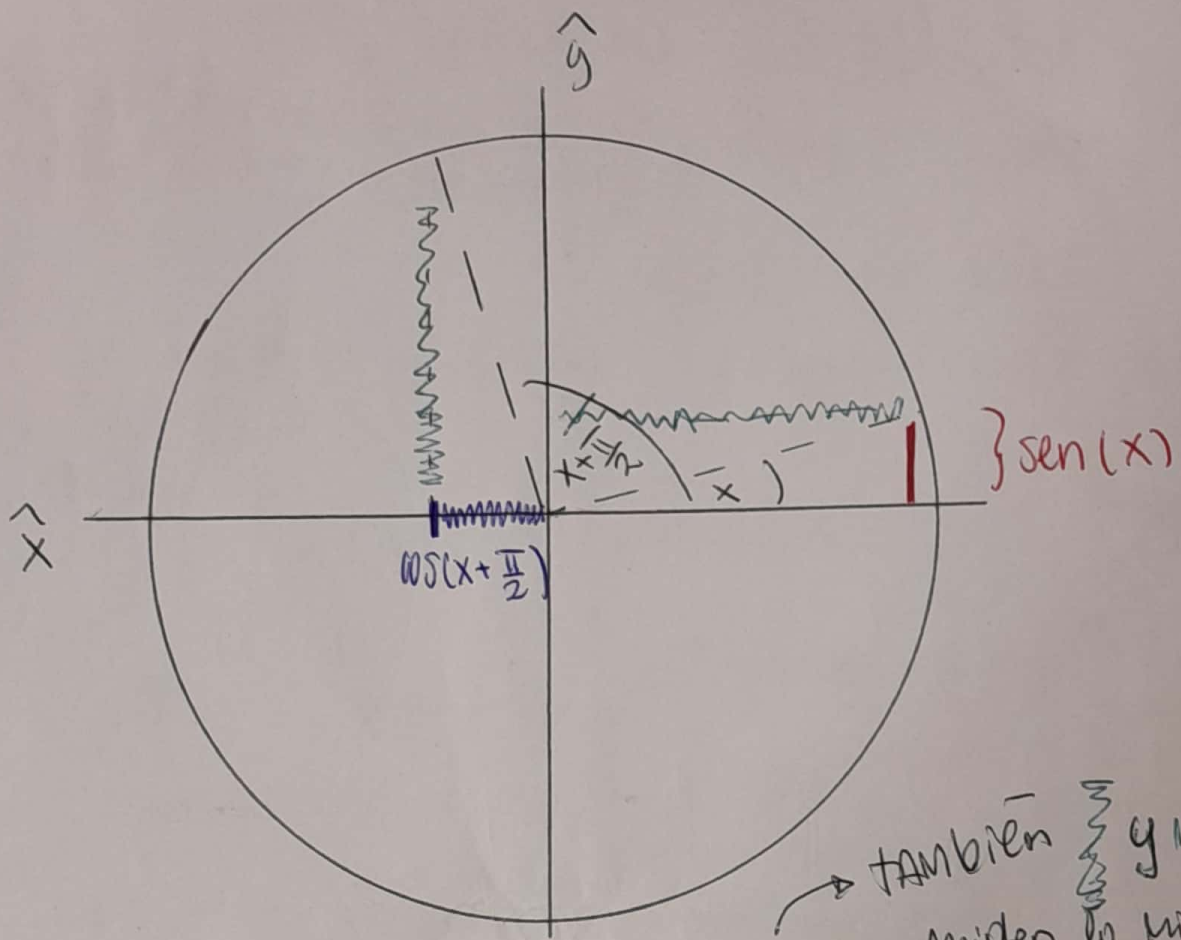
Por hipótesis, $\cos(x+y) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \cos(y) = \sin(x) \sin(y) \quad (*)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \sin(x+2y) &= \sin((x+y) + y) \\ &= \sin(x+y) \cos(y) + \sin(y) \cos(x+y) \\ &= \sin(x+y) \cos(y) + \sin(y) \cdot \underbrace{0}_{\text{(por hip.)}} \\ &= \sin(x+y) \cos(y) \\ &= (\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)) \cos(y) \\ &= \sin(x) \cos^2(y) + \sin(y) \underbrace{\cos(x) \cos(y)}_{\downarrow (*)} \\ &= \sin(x) \cos^2(y) + \sin(y) \sin(x) \sin(y) \\ &= \sin(x) \cos^2(y) + \sin^2(y) \sin(x) \\ &= \sin(x) (\cos^2(y) + \sin^2(y)) \\ &= \sin(x) \quad // \end{aligned}$$



luego, $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ y $\sin(x)$ tienen el mismo

$$\text{Argo, } \Rightarrow |\cos(x + \frac{\pi}{2})| = |\sin(x)|$$

pero como $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ está a la izquierda del eje $\hat{x}$, $-\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$.
 $\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

y $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ y $\sin(x)$ tienen el mismo Argo?!!

pg es el mismo ángulo x , solo ROTADO
 ANÁLIGO $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$