Resumen Auxiliar 7
Funciones y Trigonometría
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Sivert Scaff G. & Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (CEROS DE UNA FUNCIÓN) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremos *ceros de* f a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta al eje OX.

DEFINICIÓN (CONJUNTO IMAGEN) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremosonjunto Imagen de f al conjunto definido por

$$\text{Im } (f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in A) \text{ de modo que } y = f(x)\}.$$

O sea

$$\text{Im } (f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

DEFINICIÓN (FUNCIÓN PAR) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función par* ssi

- $(\forall x \in A)\ -x \in A$.
- $(\forall x \in A)\ f(-x) = f(x)$.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN IMPAR) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función impar* ssi

- $(\forall x \in A)\ -x \in A$.
- $(\forall x \in A)\ f(-x) = -f(x)$.

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS VERTICALES) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $x_1, x_2, \cdots x_r$ son todas las raíces del Denominador, es decir de la función $Q(x)$ pero no del Numerador, o sea de la función $P(x)$, entonces las rectas $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_r$ se llaman **Asíntotas verticales** de la función $f(x)$ y se caracterizan por que para valores de x cercanos a dichos puntos la función crece o decrece sin cotas.

DEFINICIÓN (ASÍNTOTA HORIZONTAL) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $n = m$ la recta $y = \frac{a_m}{b_m}$ se llama **asíntota horizontal** de la función f y se caracteriza por que para valores de x muy grandes o muy negativos los valores de $f(x)$ se aproximan a dicha recta.

Si $n < m$ la asíntota horizontal es $y = 0$.

- Diremos que f es **inyectiva** ssi $[f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2]$, o equivalentemente $[x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)]$
- Diremos que f es **epiyectiva** ssi Im (f) = Cod (f)

DEFINICIÓN (FUNCIÓN INVERSA) Sea $f : \text{Dom}(f) \to \text{Cod } (f)$ una función biyectiva. se define la función inversa de f como la función f^{-1} definida por:

$$f^{-1} : \text{Cod } (f) \to \text{Dom}(f) \text{ tal que } [y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)].$$

Resumen Auxiliar 7
Funciones y Trigonometría
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Sivert Scaff G. & Ignacio Dagach Abugattas

Observación: Una biyección entre ángulos y reales (no es la única). Dado $x \in \mathbb{R}$, sea P_x el punto de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y de radio 1, que se obtiene al girar un ángulo cuya medida en radianes es x , partiendo desde el punto $(1, 0)$. Entonces si $x > 0$ estaremos rotando en el sentido contrario a los punteros del reloj y si $x < 0$ lo estaremos haciendo en el sentido de los punteros del reloj. Usando P_x definiremos las funciones trigonométricas.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN COSENO) Definimos la función **coseno** (cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) como aquella que a cada x le asocia la abscisa del punto P_x.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN SENO) La función **seno** (sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) queda definida como aquella que a cada x asocia la ordenada del punto P_x.

De la definición de las funciones seno y coseno se deduce que ellas satisfacen la así llamada Identidad Trigonométrica Fundamental:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Seno:
$sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Le asocia a cada x la ordenada del punto P_x
Período: 2π
Paridad: impar
$sen^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
Crece en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y decrece en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

Coseno:
$cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Le asocia a cada x la absica del punto P_x
Período: 2π
Paridad: par
$cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
Positiva en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y es negativa en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
Decrere en $[0, \pi]$

Tangente:
$tan : A \to \mathbb{R}$ donde $A = \{x \in \mathbb{R} : cos(x) \neq 0\}$
Le asocia a x $\frac{sen(x)}{cos(x)}$
Período: π
Paridad: impar
Sus ceros son los de la función *sen*
Es positiva en $(0, \frac{\pi}{2})$
Es estrictamente creciente en cada intervalo de la forma $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) \pm cos(\alpha)sen(\beta)$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$$

1. $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
2. $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$
3. $sen(x) \pm sen(y) = 2sen(\frac{x \pm y}{2})cos(\frac{x \mp y}{2})$

Teorema 6.1. *En un triángulo rectángulo se satisface que*

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c},\ \text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} \ \ y \ \ \tan(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

- $sen(\pi \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$
- $cos(\pi \pm \alpha) = -cos(\alpha)$
- $cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$
- $sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) = cos(\alpha)$

Observación: En el caso de funciones reales de variable real existen varias de ellas que no son inyectivas o no son epiyectivas y por lo tanto no tienen inversa. sin embargo, se puede construir una función inversa por el siguiente método.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera no invertible.

- Se determina $B \subseteq A$ tal que $f|_B$ sea inyectiva.
- De igual modo se restringe el codominio $\mathbb{R}$ a Im $(f|_B)$. Con esto $f|_B$ se hace biyectiva y luego invertible.