PAUTA AUXILIAR 3
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
PRIMAVERA 24, SECCIÓN 3.
Ygnacio Dagach Abuyattas

a) Sea $A = (\alpha, 0)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha < 0$, encuentre el lugar geométrico C_0 de los puntos P del plano tales que su distancia a A sea el doble de su distancia al origen. Defina como L_0 la recta que pasa por el *"polo norte"* de C_0 y el origen, y entregue la ecuación de la recta L que pasa por el *"polo norte"* de C_0 y es perpendicular a L_0.

P1. a)

$A = (\alpha, 0) = (a, 0)$ solo notación

P.2

SEA $P = (x, y)$

$d(P,A) = 2d(P,O) \iff d(P,A)^2 = 4d(P,O)^2$

$d(P,A)^2 = (x-a)^2 + (y-0)^2$
$= x^2 - 2ax + a^2 + y^2$

$4d(P,O)^2 = 4[(x-0)^2 + (y-0)^2]$
$= 4(x^2+y^2)$ (1 pt)

LUEGO,

$d(P,A)^2 = 4d(P,O)^2 \iff x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$
$\iff 3x^2 + 3y^2 + 2ax = a^2$
$\iff x^2 + y^2 + \frac{2}{3}ax = \frac{a^2}{3}$
$\iff \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{9}$ (2 pts)
$\iff \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}a^2$

$\iff \left(x - \left(-\frac{a}{3}\right)\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2$ (2 pts)

NOTA: SI ESCRIBEN LA DISTANCIA CON LA RAÍZ CUADRADA, ENTONCES SON 5 PTS HASTA ACÁ.

LUEGO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO $\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$ Y RADIO $\frac{2}{3}a$.

$\Longrightarrow$

$L_0: y = mx + n$

donde

$m = \dfrac{\frac{2}{3}a}{-\frac{1}{3}a} = -2$

y $n = 0$

pues la recta pasa por el $(0,0)$ y el $\left(-\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a\right)$

Polo Norte.

(identifique el pq de cada resultado)

$\Longrightarrow L: y = m'x + n'$

donde $m \cdot m' = -1$
$-2 \cdot m' = -1$
$\Rightarrow m' = \frac{1}{2}$

pq???

$\Longrightarrow$
$L: y = \frac{1}{2}x + n'$

Pero $\left(-\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a\right) \in L$

$\Longrightarrow$

$\frac{2}{3}a = \frac{1}{2}\left(\frac{-a}{3}\right) + n'$

$\Longrightarrow$

$n' = \dfrac{5a}{6}$.

PAUTA AUXILIAR 3
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
PRIMAVERA 24, SECCIÓN 3.
Ygnacio Dagach Abuyattas

a) Sea $A = (\alpha, 0)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$, encuentre el lugar geométrico C_0 de los puntos P del plano tales que su distancia a A sea el doble de su distancia al origen. Defina como L_0 la recta que pasa por el *'polo norte'* de C_0 y el origen, y entregue la ecuación de la recta L que pasa por el *'polo norte'* de C_0 y es perpendicular a L_0.

$$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),A) = 2d((x,y),(0,0))\}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in C_0 \iff d((x,y),A) = 2d((x,y),(0,0))$$

$$\iff d((x,y),A)^2 = 4\,d((x,y),(0,0))^2$$

$$\iff (x-\alpha)^2 + y^2 = 4(x^2+y^2)$$

$$\iff x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\iff 3x^2 + 2\alpha x - \alpha^2 + 3y^2 = 0$$

$$\iff x^2 + \frac{2}{3}\alpha x - \frac{\alpha^2}{3} + y^2 = 0$$

$$\iff x^2 + 2\cdot\left(\frac{\alpha}{3}\right)x - \frac{\alpha^2}{3} + y^2 = 0$$

$$\iff x^2 + 2\left(\frac{\alpha}{3}\right)x + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{3} + y^2 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{\alpha}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{9} + \frac{\alpha^2}{3}$$

$$\iff \left(x + \frac{\alpha}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4\alpha^2}{9}$$

$$\iff \left(x + \frac{\alpha}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow C_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid \left(x + \frac{\alpha}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2\right\}$$

$$\Rightarrow \text{centro}(C_0) = \left(-\frac{\alpha}{3}, 0\right)$$

$$\text{RADIO}(C_0) = 2\alpha/3$$

$$\Rightarrow \text{POLO NORTE}(C_0) = \left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}\right)$$

$\Longrightarrow$ L_0 PASA por POLONORTE$(C_0) = \left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}\right)$
y $(0,0)$

$$\Longrightarrow L_0 : \left(y - \frac{2\alpha}{3}\right) = \left[\frac{\frac{2}{3}\alpha - 0}{-\frac{\alpha}{3} - 0}\right]\left(x + \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$y - \frac{2\alpha}{3} = -2\left(x + \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$y = -2x - \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha$$

$$y = -2x$$

$$\Longrightarrow L_0 : y = -2x$$

$\Longrightarrow$ como L es $\perp$ a L_0, $m_L \cdot m_{L_0} = -1$

$$m_L \cdot (-2) = -1$$

$$m_L = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ $L : y = \frac{1}{2}x + n$ para algún n a determinar

pero como L PASA por el polo norte de $C_0 = \left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}\right)$;

$$\frac{2\alpha}{3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{3}\right) + n$$

$$\frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha}{6} = n$$

$$\frac{4\alpha}{6} + \frac{\alpha}{6} = n \Longrightarrow n = \frac{5\alpha}{6}$$

Finalmente $L : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}\alpha$.

P1. b.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

b) Entregue la ecuación de la circunferencia C_1 cuyo radio es el mismo que el de $x^2+x+y^2=3y$, considerando que el *"polo sur"* de C_1 pasa por el punto (a,b).

Obtengamos el radio por completación de $\square$'s

$$x^2+x+y^2=3y$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+y^2-3y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2-2\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)y+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}+\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}+\tfrac{9}{4}=\tfrac{10}{4}\Rightarrow R=\tfrac{\sqrt{10}}{2}.$$

Luego, si C_1 pasa por (a,b) en su polo sur, el centro de C_1 debe estar verticalmente hacia arriba de (a,b) en (R = radio de C_1) unidades, y horizontalmente en la misma posición que (a,b), es decir Centro$(C_1)=(a,b+R)$

$$\Rightarrow C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ (x-a)^2+(y-(b+R))^2=R^2\}$$

donde $R=\sqrt{10}/2$

P2

P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triangulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$
$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$
$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

Para esto:

a) Deteremine los vértices del triangulo y haga un dibujo

b) Determine las bisectrices del triangulo

c) Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

Hint 1: Una circunferencia inscrita en un triangulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.
Hint 2: Recuerde que la formula de la distacia d entre una recta $ax + by + c = 0$ y un punto (x_0, y_0) es $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

P2.a

a) Para determinar los vértices debemos intersectar cada par de rectas.

$V_1 = L_1 \cap L_2:\quad 6x - 9y + 63 = 6x - 4y - 12$
$\iff 5y = 75$
$\iff y = 15$
$\rightarrow 3x - 30 - 6 = 0 \iff 3x = 36 \iff x = 12$

$\Rightarrow \boxed{V_1 = (12, 15)}$

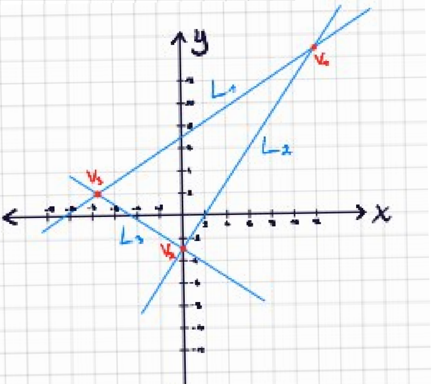
$V_2 = L_2 \cap L_3:\quad 6x - 4y - 12 = 6x + 9y + 27$
$\iff 13y = -39$
$\iff y = -3$
$\rightarrow 3x + 6 - 6 = 0 \iff 3x = 0 \iff x = 0$

$\Rightarrow \boxed{V_2 = (0, -3)}$

$V_3 = L_1 \cap L_3:\quad 2x - 3y + 21 = 2x + 3y + 9$
$\iff 6y = 12$
$\iff y = 2$
$\rightarrow 2x + 6 + 9 = 0 \iff 2x = -15 \iff x = -15/2$

$\Rightarrow \boxed{V_3 = (-15/2, 2)}$

Ahora podemos hacer el dibujo.



P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triangulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$
$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$
$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

Para esto:

a) Deteremine los vértices del triangulo y haga un dibujo

b) Determine las bisectrices del triangulo

c) Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

Hint 1: Una circunferencia inscrita en un triangulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.
Hint 2: Recuerde que la formula de la distacia d entre una recta $ax + by + c = 0$ y un punto (x_0, y_0) es $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

P2.b)

b) Las bisectrices de un triángulo son aquellas rectas que dividen un ángulo en dos partes iguales, por lo tanto los puntos de una bisectriz estarán a la misma distancia de las dos rectas que la definen.

$\longrightarrow$ 0.5 pts.

El argumento inicial DEBE estar (basta que digan desde el "por lo tanto".

Entonces usando la fórmula de la distancia punto-recta, tenemos:

$$B_1: \quad \frac{|2x-3y+21|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x-2y-6|}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow [2x-3y+21 = 3x-2y-6] \vee [2x-3y+21 = -3x+2y+6]$$

$$\Leftrightarrow [x+y-27=0] \vee [x-y+3=0]$$

$\longrightarrow$ Notar que la recta $x+y=27$ pasa por fuera del triángulo, ya que cuando $x=0$, $y=27>7=\max\{y:(0,y)\in\Delta\}$
Por lo tanto, la recta que buscamos es

$$\boxed{B_1: \quad x-y+3=0}$$

$$B_2: \quad \frac{|3x-2y-6|}{\sqrt{13}} = \frac{|2x+3y+9|}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow [3x-2y-6 = 2x+3y+9] \vee [3x-2y-6 = -2x-3y-9]$$

$$\Leftrightarrow [x-5y-15=0] \vee [5x+y+3=0]$$

$\longrightarrow$ Notar que la recta $x-5y-15=0$ pasa por fuera del triángulo, ya que cuando $y=0$, $x=15>2=\max\{x:(x,0)\in\Delta\}$
Por lo tanto, la recta que buscamos es

$$\boxed{B_2: \quad 5x+y+3=0}$$

$$B_1: \quad \frac{|2x-3y+21|}{\sqrt{13}} = \frac{|2x+3y+9|}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow [2x-3y+21 = 2x+3y+9] \vee [2x-3y+21 = -2x-3y-9]$$

$$\Leftrightarrow [y-2=0] \vee [2x+15=0]$$

$\longrightarrow$ Notar que la recta $2x+15=0$ pasa por fuera del triángulo, ya que $x=-15/2=\min\{x:(x,y)\in\Delta\}$
Por lo tanto, la recta que buscamos es

$$\boxed{B_3: \quad y=2}$$

P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triangulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$
$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$
$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

P2.C

Para esto:

a) Deteremine los vértices del triangulo y haga un dibujo

b) Determine las bisectrices del triangulo

c) Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

Hint 1: Una circunferencia inscrita en un triangulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.
Hint 2: Recuerde que la formula de la distacia d entre una recta $ax + by + c = 0$ y un punto (x_0, y_0) es $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

c) Para encontrar la circunferencia inscrita partiremos por determinar el centro, que se encuentra en la intersección de las bisectrices.

$$C=(h,k)\in B_1 \cap B_3 \iff h-k+3=0 \quad \wedge \quad k-2=0$$
$$\iff h=-1, \quad k=2$$

Ahora debemos encontrar el radio, que es la distancia del centro a cualquiera de las rectas.

$$R^2 = \frac{(2h-3k+21)^2}{13} = \frac{(-2-6+21)^2}{13} = \frac{13^2}{13} = 13$$

Finalmente, tenemos que la circunferencia inscrita en el triángulo tiene ecuación

$$\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2=13}$$

, con centro en $\boxed{C=(-1,2)}$ y radio $\boxed{R=\sqrt{13}}$

P3)

Considere dos circunferencias C_1 y C_2 La primera está centrada en el origen y tiene radio 1. La segunda está centrada en $(2,1)$ y tiene radio r. Demuestre que si $1+r=\sqrt{5}$, entonces C_1 y C_2 tienen un único punto en común.

las circunferencias son:

C_1: $x^2+y^2=1$

C_2: $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$.

sus puntos en común vendrán dados por resolver el sist de ecuaciones dado por C_1 y C_2

$\Rightarrow$

C_1: $x^2+y^2=1$

C_2: $x^2-4x+4+y^2-2y+1=r^2$

$\Rightarrow$

C_1: $x^2+y^2=1$

C_2: $(x^2+y^2)-4x-2y+1=r^2$

$\Rightarrow$ reemplazando C_1 en ( ) tenemos que

$(1)-4x-2y+1=r^2$

$-4x-2y+2=r^2$

$\Rightarrow$

$2y=-4x+3-r^2$

$\Rightarrow$

$y=-2x+3-\dfrac{r^2}{2}$

pero como $r=\sqrt{5}-1$,

$\dfrac{r^2}{2}=\dfrac{5-2\sqrt{5}+1}{2}=\dfrac{2}{2}(3-\sqrt{5})=3-\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ $y=-2x+3-\dfrac{r^2}{2}=-2x+3-3+\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ $y=-2x+\sqrt{5}$ (llamaremos a esta recta L)

De lo anterior notamos que : los puntos que pertenecen a C1 y C2, pertenecen a L.

luego $C_1 \cap C_2 \subset C_1 \cap C_2 \cap L$ y como $C_1 \cap C_2 \cap L \subset C_1 \cap C_2$, $C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_2 \cap L$

Entonces analicemos los puntos que están en C1, C2 y L, pues son los mismos que en C1 y C2, pero tenemos más información

si $(x,y) \in C_1 \cap C_2 \cap L$, en particular $(x,y) \in C_i \cap L$ $(i \in \{1,2\})$

$\Longrightarrow$

veamos los puntos en $C_1 \cap L$ pues son más simples de calcular

si $(x,y) \in C_1 \cap L$: como $(x,y) \in C_1$, $x^2+y^2=1$ (1)

como $(x,y) \in L$, $y = -2x+\sqrt{5}$ (2)

$\Longrightarrow$ reemplazando (2) en (1)

$\forall (x,y) \in C_1 \cap L$:
$$x^2+y^2=1$$
$$= x^2+(-2x+\sqrt{5})^2=1$$
$$= x^2+4x^2-4\sqrt{5}x+5=1$$
$$= 5x^2-4\sqrt{5}x+4=0 \quad (\star)$$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

NOTAR que $\Delta(5x^2-4\sqrt{5}x+4) = 16\cdot5-4\cdot5\cdot4=0$

$\Longrightarrow$ todos los puntos $(x,y) \in C_1 \cap L$ tienen la misma primera coordenada, digamosle x_0

$\Longrightarrow$ todos los puntos de $C_1 \cap L$ son de la forma (x_0, y) para algún $y \in \mathbb{R}$

$\frac{\sqrt{5}}{5}$

pero como todos los puntos de $C_1 \cap L$ pertenecen en particular a L tenemos que $\forall (x_0,y) \in C_1 \cap L$, $y = -2x_0+\sqrt{5}$

$\Longrightarrow$ todos los puntos $(x,y) \in C_1 \cap L$ son de la forma $(x_0, -2x_0+\sqrt{5})$ $\Longrightarrow$ solo hay 1 punto en $C_1 \cap L$!!!

Al resolver $(\star)$ notamos que $x_0 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, luego, el único punto en $C_1 \cap L$ es el $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \in C_1 \cap L$$

$\Rightarrow$ solo falta ver que $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \in C_2$. (Propuesto)

$$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \in C_1 \cap L \wedge \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \in C_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \in C_1 \cap C_2 \cap L$$

$$\Rightarrow \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\} \subseteq C_1 \cap C_2 \cap L \subseteq C_1 \cap L = \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_2 \cap L = \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$$

demostrando lo pedido.