Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalacios J.
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

a) Demuestre la unicidad de neutro e inverso multiplicativo (BONUS)

b) Sea $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto regido por los sigueinte axiomas:

$$\textbf{A1}[\ 3 \in \Theta, 7 \notin \Theta] \qquad \textbf{A2}\ [x \in \Theta \implies 3x+1 \in \Theta] \qquad \textbf{A3}\ [x, y \in \Theta \implies x+y \in \Theta]$$

Demuestre, justificando cada paso, que:

i) $1 \notin \Theta$

ii) $x, y \in \Theta \implies 3x + 2y + 4 \in \Theta$

iii) $x, y \in \Theta \implies 4 - x - y \notin \Theta$

iv) $3x + y + 4 \notin \Theta \implies x \notin \Theta \vee \frac{y}{2} \notin \Theta$

v) No existe un $x \in \Theta$ tal que $3(2x-1) = 39$

P2. De controles

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

f) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-(x^{-1}) + 1) \cdot x = x + (-1)$

g) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, xy^{-1} = (x^{-1}y)^{-1}$

h) $1 + (-1)^{-1} = 0$

Resumen Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo

Sivert Scaff & Ignacio Dagach Abugattas

Introducción al Cálculo MA1001-3 Primavera 2024

Axioma 1. (Conmutatividad)

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real y es independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y \;=\; y + x.$$

b) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su producto es un real y es independiente del orden en que se haga el producto, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y \;=\; y \cdot x.$$

Axioma 2. (Asociatividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Axioma 3. (Distributividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y + z) = xy + xz$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y)z = xz + yz$

Axioma 4a. (Existencia de elemento neutro para la suma)
En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todo elemento e que cumpla esta propiedad se dirá neutro para la suma.

Axioma 4b. (Existencia de elemento neutro para el producto)
En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Axioma 5. (Existencia de elementos inversos)

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema 1.1. *El elemento neutro para la suma es único.*

Teorema 1.2. *El elemento neutro para el producto es único.*

Teorema 1.3.

1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único.*
2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, el inverso multiplicativo es único.*

- Al único neutro para el producto lo llamaremos "uno" y lo denotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.
- Los inversos aditivos y multiplicativos de x se denotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.