Auxiliar 11

Control de Calidad

Profesor: Andre Carboni, Azucena Orellana, Andrés Weintraub.
Auxiliares: Vicente Bossa, Benjamín Carmona, Camila Carrasco, Camilo Escalante, Catalina Lagos, Pedro Maldonado, Catalina Miranda, Diego Moreno, Nicolás Pacheco, Nicolás Sepúlveda, Sofía Valencia.

Pregunta 1

El gerente de calidad de una reconocida empresa de bebidas energéticas decide evaluar el proceso de llenado de las latas, cuyo contenido debe ser de 500 ml en promedio. Los límites de tolerancia son 490 ml (inferior) y 510 ml (superior). Se toma una muestra aleatoria de la producción y se encuentra que las latas tienen un promedio de 503 ml y una desviación estándar de 3 ml.

1. Calcule el índice de capacidad real (o centrado) del proceso y comente.
2. Dada la muestra, ¿cuál es la probabilidad de producir una lata defectuosa (en términos de contenido)?
3. La empresa decide ajustar sus especificaciones y establece nuevos límites de tolerancia para el contenido de sus latas: inferior de 495 ml y superior de 505 ml. Luego, se realiza un control estadístico del proceso con 4 muestras de tamaño 7 cada una, obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 1: Promedios de las muestras y sus desviaciones estándar

Muestra	**Promedio (ml)**	**Desviación Estándar (ml)**
1	503,4	2,8
2	502,2	3,1
3	504,7	3,0
4	495,8	3,4

Determine si el proceso está fuera de control, apóyese de la construcción de un gráfico X-barra.

Pauta:

1. El índice de capacidad real del proceso, se calcula como:

$$Cpk = \min\left(\frac{\bar{X} - LTI}{3\sigma}, \frac{LTS - \bar{X}}{3\sigma}\right)$$

Donde:

- Media del proceso $(\bar{X}) = 503$ ml
- Desviación estándar $(\sigma) = 3$ ml
- Límite de tolerancia inferior $(LTI) = 490$ ml
- Límite de tolerancia superior $(LTS) = 510$ ml

Sustituyendo:

$$Cpk = \min\left(\frac{503-490}{3\cdot 3}, \frac{510-503}{3\cdot 3}\right) = \min\left(\frac{13}{9}, \frac{7}{9}\right) = \frac{7}{9} \approx 0,78$$

Con esto, como el índice de capacidad $Cpk = 0,78 < 1$, entonces el proceso tiene baja capacidad para cumplir con los límites de especificación, lo que conlleva un riesgo significativo de producir latas defectuosas (alta probabilidad).

2. Para determinar la probabilidad de producir una lata defectuosa, primero definimos la variable aleatoria X: volumen (o contenido) de una lata; la cual se asume que distribuye normal con media 503 ml y desviación estándar 3 ml. Luego, se calcula:

$$P(\text{Lata defectuosa}) = P(X < 490) + P(X > 510)$$

Estandarizando:

$$P(\text{Lata defectuosa}) = P\left(Z < \frac{490-503}{3}\right) + P\left(Z > \frac{510-503}{3}\right)$$

$$P(\text{Lata defectuosa}) = P(Z < -4,33) + P(Z > 2,33)$$

$$P(\text{Lata defectuosa}) = P(Z < -4,33) + [1 - P(Z < 2,33)]$$

Usando la tabla de distribución normal estándar:

$$P(\text{Lata defectuosa}) = 0 + [1 - 0,9901] = 0,0099\,(\text{aprox. } 1\,\% \text{ de defectos}).$$

Por lo tanto, con probabilidad de casi $1\,\%$ se tendrá una lata defectuosa en términos de contenido, es decir, que no cumpla con los límites de especificación.

3. Antes de desarrollar esta pregunta, debemos recordar que los límites de tolerancia (LTI y LTS) NO son los mismos que los límites de control (LCI y LCS), por lo tanto, un error común al resolver esta pregunta es directamente evaluar si cada muestra está dentro de los límites de tolerancia (o especificación), sin embargo, se pide ver si el proceso está fuera de control o no, por lo que debemos considerar límites de control (los nuevos límites de tolerancia son distractores).

Entonces, se tienen los siguientes datos:

- Cantidad de muestras $(m) = 4$
- Tamaño de las muestras $(n) = 7$
- Valor $Z = 3$ (estándar Six Sigma)

Estimamos la media del proceso (poblacional):

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \bar{X}_4}{m} = \frac{503,4 + 502,2 + 504,7 + 495,8}{4} = 501,525\,\text{ml}$$

Estimamos la desviación estándar del proceso (poblacional):

$$\bar{\sigma} = \bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{m} = \frac{2,8 + 3,1 + 3 + 3,4}{4} = 3,075 \,\text{ml}$$

Calculamos los límites de control:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + Z \cdot \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} = 501,525 + 3 \cdot \frac{3,075}{\sqrt{7}} = 505,012$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - Z \cdot \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} = 501,525 - 3 \cdot \frac{3,075}{\sqrt{7}} = 498,038$$

Ahora, para determinar si el proceso está controlado, se debe cumplir que TODAS las medias muestrales estén en el rango [LCI,LCS]. En nuestro caso, se puede ver que las tres primeras muestras están dentro del rango, sin embargo, la cuarta muestra está fuera, por lo que se considera como una muestra o evento 'raro'. Obteniéndose así que el proceso (en general) está fuera de control.

Se puede resumir todo lo que calculamos en el siguiente gráfico X-Barra:

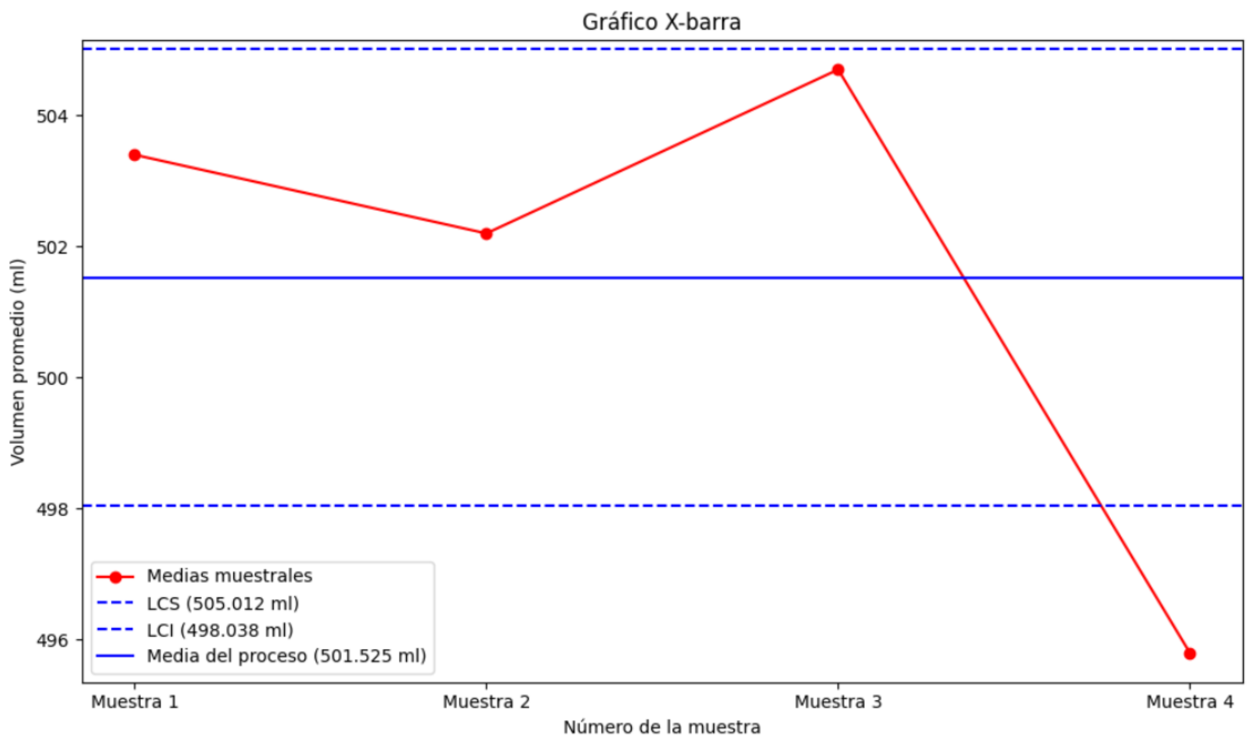

Figura 1: Gráfico X-barra

Pregunta 2

En preparación para una competencia de atletismo universitaria, se realizan pruebas de velocidad en una pista de carreras para verificar si el tiempo de carrera cumple con los estándares establecidos por la IAAF (Asociación Internacional de Federaciones de Atletismo). Los estándares indican que el tiempo promedio de una carrera de 100 metros debe estar en un rango de 10 a 12 segundos.

El grupo a cargo de las pruebas ha realizado mediciones donde se toman 4 observaciones de tiempo de carrera al día durante 10 días consecutivos. Las observaciones se toman a las mismas horas cada día (8 am, 12 pm, 3 pm y 7 pm). Los datos observados se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 2: Muestras de tiempo y estadísticas (cumpliendo con especificaciones)

Día	Hora 1	Hora 2	Hora 3	Hora 4	Media ($\bar{X}$)	Desviación Estándar (σ)
1	10.5	11.0	10.8	10.9	10.80	0.19
2	11.2	11.3	11.1	11.4	11.25	0.11
3	10.5	10.8	10.7	11.0	10.75	0.18
4	10.1	10.2	10.3	12.01	10.65	0.79
5	10.7	11.1	10.9	10.8	10.88	0.15
6	11.0	11.2	11.4	11.3	11.23	0.15
7	10.6	10.7	10.9	10.8	10.75	0.11
8	11.3	11.4	11.2	11.1	11.25	0.11
9	10.6	10.9	10.8	11.0	10.83	0.15
10	10.7	10.9	10.8	11.1	10.87	0.15

1. Según los datos anteriores: ¿Cuál de las siguientes observaciones aporta información correcta para ver si el proceso está fuera de control?
   a) El tiempo promedio de 10.95 segundos es muy alto para los estándares de la IAAF.
   b) Existe una medición de tiempo de carrera (Día 4, Hora 4) que está por encima del límite de control superior establecido por la IAAF.
   c) El promedio de las desviaciones estándar (0.21 segundos) es muy alto en relación a los estándares de la IAAF.
   d) Existe uno o más promedios de muestra ($\bar{X}$) por encima del límite de control superior.
   e) Existe uno o más promedios de muestra ($\bar{X}$) por debajo del límite de control inferior.
   f) De acuerdo a la tabla se puede establecer que el proceso está en control.
   g) Ninguna de las anteriores.
2. Basándonos en estudios de tiempo de carrera, se descubrió que cuando el cronometraje funciona correctamente, el tiempo de carrera sigue una distribución normal con media $\mu = 10.2$ segundos y desviación estándar $\sigma = 0.45$ segundos. Cuando el cronometraje falla, la media del tiempo de carrera sigue una distribución normal, pero la media aumenta un 5 % (la desviación estándar no cambia). Supongamos que el cronometraje falla al comienzo del día y funciona mal durante todo el día. ¿Cuál es la probabilidad de que al final del día, después de recolectar las 4 observaciones de ese día, el diagrama de control detecte que el proceso está fuera de control con un valor de $\bar{X}$ por encima del límite de control superior?

3. Luego de algunas investigaciones, el grupo a cargo de las pruebas llega a la conclusión de que el proceso estaba fuera de control. Las causas especiales fueron identificadas y corregidas. Luego se realizaron nuevas mediciones y se obtuvo que el proceso estaba en control, y que el nuevo tiempo promedio de carrera era de 10.2 segundos, con una desviación estándar para cada medida individual de 0.45 segundos. Dadas las características del proceso en control de cronometraje: ¿Cuál es el índice de capacidad (capability index C_p) del proceso?

Pauta:

1. La afirmación (a) no es correcta ya que los estándares establecidos son entre 10 y 12, la afirmación (b) tampoco es correcta ya que ese límite establecido es para la media $\left(\bar{X}\right)$, la alternativa (c) tampoco es correcta pues en ningún momento se menciona que la IAAF tenga estándares de desviación estándar y esta tampoco se usa directamente para saber si un proceso está bajo control, para las alternativas (d) y (e) procedemos a calcular los límites de control superior e inferior:

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3 \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}} = 10.95 - 3 \cdot \frac{0.21}{\sqrt{4}} = 10.635$$
$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3 \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}} = 10.95 + 3 \cdot \frac{0.21}{\sqrt{4}} = 11.265$$

   Se puede comprobar que todos los promedios de las muestras están en el rango $[LCL, UCL]$, por lo tanto las afirmaciones (d) y (e) tampoco son correctas, por lo que se concluye que el proceso está bajo control (alternativa (f)).

2. Definimos $\bar{X}^*$ como el promedio calculado al final del día. Dado que el cronometraje falló ese día, $\bar{X}^*$ sigue una distribución normal con media $\mu^* = 1.05 \cdot \mu$ y desviación σ. El límite de control superior está dado por $UCL = \mu + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 10.2 + 3 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{4}} = 10.875$ (notar que se ocupan los datos normales, o sea, cuando el cronómetro está funcionando correctamente, pues esos son los datos confiables para descubrir si el proceso está fuera de control o no).

   Luego la probabilidad que el estadístico $X^\star$ este por sobre UCL esta dado por:

$$P(\bar{X}^* > UCL) = 1 - P(\bar{X}^* \leq UCL)$$

   Calculemos primero $P(\bar{X}^* \leq UCL)$:

$$P(\bar{X}^* \leq UCL) = P\left(Z \leq \frac{UCL - \mu^*}{\sigma}\right)$$
$$P\left(Z \leq \frac{10.875 - 10.2 \cdot 1.05}{0.45}\right) = P\left(Z \leq 0.37\right)$$

   Entonces:

$$P(\bar{X}^* > UCL) = 1 - P(Z \leq 0.37) = 1 - 0.64$$
$$P(\bar{X}^* > UCL) = 0.36$$

3. El capability index simplemente se calcula como el límite de tolerancia superior (12) menos el límite de tolerancia inferior (10) dividido el 6σ, con $\sigma = 0.45$, por lo que procedemos a calcular con estos valores:

$$C_p = \frac{12 - 10}{6 \cdot 0.45} = 0.74$$

Pregunta 3 (Comentes)

Comente la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. “Reducir la varianza del parámetro de producción de un proceso tendrá como consecuencia un mayor cumplimiento de las especificaciones del cliente y por lo tanto un mayor Capability Index”.
2. ”Si un proceso tiene un Cp de 1.5 y un Cpk de 0.8, se puede concluir que el proceso cumple con los límites de especificación y está perfectamente centrado en su objetivo”.
3. ”Los límites de especificación se determinan por las necesidades del cliente, mientras que los límites de control reflejan la variación inherente al proceso”
4. ”Un proceso fuera de control siempre implica que el producto final será defectuoso”
5. ”En el estándar Six Sigma, los límites de especificación están a 6 veces la desviación estándar de la media.”
6. “Aumentar el tamaño de las muestras en un diagrama de control permite reducir los falsos negativos, es decir reducir los eventos donde $\bar{X}$ obtiene un valor fuera de los límites de control cuando el proceso realmente estaba bajo control”

Pauta:

1. Verdadero. El C_p es calculado como el cociente entre la resta de los límites de especificación del cliente y 6σ, teniendo estos límites constantes y σ es menor entonces el resultado de ese cociente será mayor teniendo como consecuencia un aumento del C_p.
2. Falso. Un Cp de 1.5 indica que el proceso tiene suficiente capacidad potencial para cumplir con los límites de especificación, pero un Cpk de 0.8 demuestra que el proceso no está centrado en su objetivo, lo que puede causar que parte de la producción no cumpla con las especificaciones.
3. Verdadero. Los límites de especificación son externos y están basados en los requisitos del cliente, mientras que los límites de control dependen de la variabilidad natural del proceso.
4. Falso. Un proceso fuera de control indica que hay causas especiales de variación, pero no necesariamente que todos los productos serán defectuosos.
5. Verdadero. Este es el principio fundamental del estándar Six Sigma.
6. Falso. Los límites superiores e inferiores se ajustan con respecto al tamaño de la muestra para que la probabilidad de falso negativo sea siempre la misma, aunque es cierto que aumentar el tamaño de la muestra al reducir los límites nos permitirá mejorar la precisión para detectar como procesos fuera de control aquellos que realmente están fuera de control reduciendo los casos donde un proceso fuera de control no es catalogado como tal.