Pauta Auxiliar 9

Procesos de Poisson y CMTC

Profesores: Susana Mondschein y Denis Sauré
Auxiliares: I. Alarcón, A. Carter, A. Díaz, A. Ferrada, F. Fierro,
D. Kauer, P. Maldonado, D. Moreno, I. Vidal

Pregunta 1 [C3 2023-2]

Considere un restaurante de hamburguesas que solo recibe pedidos por teléfono para despacho a domicilio (delivery). Los pedidos llegan de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 10$ pedidos/hora. Las estadísticas muestran que un 40 % de los pedidos son por una única hamburguesa, y el 60 % restante es por dos hamburguesas. Asuma que el tiempo en preparar las hamburguesas es despreciable.

(a) Si se sabe que en la última hora se han recibido 3 pedidos, ¿cuál es el número esperado de hamburguesas vendidas en la última hora?

Solución:
Opción 1: Podríamos considerar que X = la cantidad de pedidos de una hamburguesa distribuye como una Binomial$(3; 0.4)$.

Luego, si $X = 0$ se vendieron 6 hamburguesas, $X = 1$ se vendieron 5 hamburguesas, $X = 2$ se vendieron 4 hamburguesas y $X = 3$ se vendieron 3 hamburguesas. Luego la cantidad de hamburguesas esperada es:

$$6\binom{3}{0}0.4^0 \cdot 0.6^3 + 5\binom{3}{1}0.4^1 \cdot 0.6^2 + 4\binom{3}{2}0.4^2 \cdot 0.6^1 + 3\binom{3}{3}0.4^3 \cdot 0.6^0 = 4.8$$

Opción 2: Calcular el número esperado de hamburguesas en un pedido y luego multiplicar por 3. Esto es debido a que si consideramos que en 1 pedido de hamburguesas se tiene:

$$\#\text{Hamburguesas en 1 pedido} = 0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot 2 = 1.6$$

Entonces, en tres pedidos se tendrá:

$$3(1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6) = 3 \cdot 1.6 = 4.8$$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan 5 hamburguesas en la próxima hora?

Solución:
Existen 3 casos posibles:

- 5 pedidos de 1.
- 3 pedidos de 1, 1 de 2.
- 1 pedido de 1, 2 de 2.

Esto lo podemos ver de dos maneras. La primera, sea:

- Y = Número de pedidos solicitados $\sim$ Poisson(10).
- $X(n)$ = Número de pedidos de una hamburguesa en n pedidos $\sim$ Binomial(n; 0.4).

Finalmente, la probabilidad es:

$$P(Y = 5)P(X(5) = 5) + P(Y = 4)P(X(4) = 3) + P(Y = 3)P(X(3) = 1)$$

La segunda, definiendo procesos de poisson:

- N_U =cantidad de pedidos de una hamburguesa que llegan hasta t.
- N_D =cantidad de pedidos de dos hamburguesas que llegan hasta t.

Por desagregación $N_U \sim$ Poisson($0.4 \cdot 10$) = Poisson(4) y $N_D \sim$ Poisson($0.6 \cdot 10$) = Poisson(6). Además, son procesos independientes entre sí, por lo que se define que la probabilidad de que se vendan 5 hamburguesas en la próxima hora es de:

$$P(N_U(1) = 5)P(N_D(1) = 0) + P(N_U(1) = 3)P(N_D(1) = 1) + P(N_U(1) = 1)P(N_D(1) = 2)$$

(c) Se define $X(t)$ = número de hamburguesas ordenadas hasta el instante t. ¿Es $X(t)$ un proceso de Poisson? Justifique.

Solución:
No, ya que al ver pedidos de dos hamburguesas no se cumple el axioma de incrementos unitarios, como no se cumplen los 3 axiomas no es un proceso de Poisson.

La política de la empresa es juntar 3 pedidos para enviarlos con el delivery *MotoFast*, pero ningún pedido espera más de 30 minutos para ser enviado; por ejemplo, si se recibe un pedido, y en los próximos 30 minutos no llega ningún otro, entonces el repartidor *MotoFast* se lleva ese único pedido. Asuma que hay siempre un repartidor de *MotoFast* disponible para la entrega de los pedidos.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que *MotoFast* parta con solo dos pedidos?

Solución:
Sea:

$Z(t)$ = el número de pedidos que llegan después del primero en un tiempo t.

Sabemos que los pedidos distribuyen como una Poisson(10 pedidos/hora), luego $Z(30 \text{ min}) \sim$ Poisson(5 pedidos/media hora). Finalmente lo que se pide calcular es:

$$P(Z(30 \text{ min}) = 1) = e^{-5} \cdot 5 \approx 0.0337$$

(e) El repartidor de *MotoFast* que estaba esperando para llevar el siguiente pedido se quedó sin batería (dejó la luz prendida). Afortunadamente no hay ningún pedido esperando. Repararla tomará un tiempo exponencial con media de 15 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un pedido antes de que repare la moto?

Solución:
Si los pedidos distribuyen como un proceso de Poisson de tasa 10 pedidos/hora, el tiempo en que se demora en llegar un pedido distribuye como una exponencial de tasa 10 pedidos/hora. Por lo que habría una carrera de exponenciales. Debido a que al llegar el primer pedido solo es necesario que llegue un pedido más, se puede definir:

- A = tiempo en que se demora llegar un pedido $\sim$ Exp(10 pedidos/hora), lllamémosla T_P
- B = tiempo en que se demora en reparar el motor $\sim$ Exp(α), llamémosla T_R

$$E[B] = \frac{1}{\alpha} = 15 \text{ [min]}$$
$$\alpha = 1\left[\frac{1}{15 \text{ min}}\right] = 4\left[\frac{1}{\text{hora}}\right]$$

Por último, debido a la carrera de exponenciales, definimos $S = mín(T_P, T_R)$, la cual distribuye con una tasa $\lambda_S = \lambda_P + \lambda_R$. Queremos encontrar la probabilidad de que $S = T_P$ Así, la probabilidad de que llegue un pedido antes de que se repare la moto es:

$$\frac{10}{4+10} = \frac{10}{14} \approx 0.71$$

Pregunta 2 [CMTC!]

"Cafesin" es una empresa que presta servicios instalando y manteniendo máquinas de café. Decide instalar dos de estas en el departamento de ingeniería malvada. Para esto, el departamento les solicitó tener un taller en la facultad para mantener las máquinas disponibles el mayor tiempo posible, comenzando a ser reparadas al instante, con una persona de mantenimiento que trabaja tiempo completo para reparar las máquinas.

El tiempo que se requiere para reparar cada máquina sigue una distribución exponencial con media de medio día. Una vez realizada la reparación, el tiempo que transcurre hasta el siguiente fallo también sigue una distribución exponencial con media de un día. Las distribuciones son independientes entre sí.

(a) Realice un diagrama de tasas de la cadena de Markov.

Solución:
Para realizar el diagrama es importante antes definir la variable aleatoria, en este caso $X(t)$, la cual corresponde al número de máquinas de café descompuestas en el tiempo t. Con ello obtenemos los estados de 0, 1 o 2 máquinas descompuestas.

Se tiene además que el tiempo para arreglar una máquina es de 1/2 día, es decir, se tiene una tasa de reparación de dos máquinas en un día. También se tiene la tasa de fallos, un fallo al día. Esto se obtiene de recordar que si nos indican que, en una situación que tiene un tiempo que distribuye exponencial, y nos dan su media, obtenemos la tasa con la que distribuye con (siendo T_R el tiempo de reparación de las máquinas):

$$E(T_R) = \frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_R = 2$$

El siguiente paso para obtener la CMTC es diagramar los estados y encontrar las tasas con las que pasan de un estado a otro. Para ello se debe determinar si existe carrera de exponenciales o no al pasar de un estado a otro.

En el caso de q_{01} se tiene que pueden fallar ambas máquinas de café, por lo que se tiene una carrera de exponenciales ya que el tiempo que demore en pasar del estado 0 al estado 1 será el mínimo entre el tiempo en que se demora en descomponerse la primera máquina y la segunda máquina (puede hacer la analogía de que se tendrá que será el $S = mín(T_1, T_2)$), por lo que se suman sus tasas de fallo, obteniendo dos fallas diarias.

Para el caso de q_{12} se tiene únicamente que una máquina puede fallar , por lo que no hay carrera de exponenciales y la tasa de fallo es de una por día.

En el caso de las reparaciones, es decir, q_{10} y q_{21} la tasa es de dos reparaciones diarias, dado que está la limitante de que existe sólo 1 reparador de máquinas por lo que no hay carrera de exponenciales (por ello, no se suman las tasas)

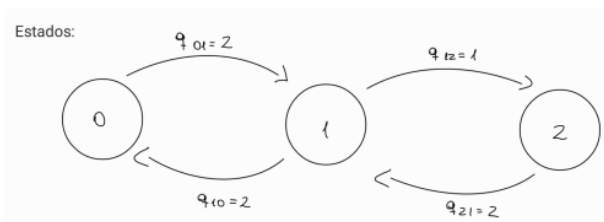


Figura 1: Caption

(b) Determine las tasas de transición.

Solución:
En este caso se calcula las tasas de transición total hacia fuera de cada estado, por ejemplo, en el estado 1, q_1 se "escapan" del estado q_{01} y q_{12}, por lo que $q_1 = q_{10} + q_{12} = 2 + 1$.

$$q_0 = q_{01} = 2,$$
$$q_1 = q_{10} + q_{12} = 3,$$
$$q_2 = q_{21} = 2.$$

Recordar que las tasas de transición total nos indican que el tiempo de permanencia en un estado i es un tiempo exponencial de parámetro obtenido de la sumatoria:

$$\lambda_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{R} \lambda_{ij}.$$

(c) Realice las distintas ecuaciones de balance para cada estado.

Solución:
Las ecuaciones de estado estable en cadenas de Markov se expresan como $\pi\mathbf{Q} = 0$, donde π es el vector de estado estable y $\mathbf{Q}$ es la matriz de transición.

Así, Q será:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

En este caso se tiene entonces,

$$\text{Estado 0: } 2\pi_0 = 2\pi_1,$$

$$\text{Estado 1: } 3\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2,$$

$$\text{Estado 2: } 2\pi_2 = \pi_1.$$

Las probabilidades suman 1: $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$.

(d) En el largo plazo, ¿qué porcentaje del tiempo estarán ambas máquinas descompuestas?

Solución:
Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos que,

$$\pi_0 = \frac{2}{5},$$

$$\pi_1 = \frac{2}{5},$$

$$\pi_2 = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, en el largo plazo, para que ambas máquinas estén descompuestas e debe estar en el estado π_2, por lo que será el 20 % del tiempo.

Pregunta 3 [C3 2022-2, Poisson×CMTC]

SOS es una empresa de alarmas de seguridad que atiende 24/7 (24 horas, los 7 días de la semana). SOS recibe llamadas cuando se activan las alarmas de sus clientes, en cuyo caso debe mandar una patrulla SOS (1 auto y 2 guardias) a chequear la casa "en peligro".

Un estudio de SOS determinó que las llamadas se reciben de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 5$ llamadas/hora. Se sabe, afortunadamente, que solo el 20 % de esas llamadas corresponden a robos (el resto son falsas alarmas).

Cuando se recibe la llamada de un cliente y no hay patrullas para enviar, entonces la llamada pasa directamente a carabineros para ser atendida. En este último caso, la empresa de seguridad debe pagar a carabineros por el servicio, los que cobran \$M por llamada atendida.

El tiempo que se demora una patrulla SOS en ir, revisar la casa y volver a la central de SOS se distribuye exponencialmente con tasa $\mu = 1$ llamada/hora. Se cuentan con tres patrullas de seguridad para acudir a estas emergencias (3 autos y 6 guardias disponibles, 2 para cada auto).

Consideraciones:

- Se reciben llamadas $\sim$ Poisson($\lambda = 5$ llamadas/hora).
- El 20 % de las llamadas son robos reales. El otro 80 % de las llamadas son falsas alarmas.
- Si nadie atiende la llamada, se traspasa a carabineros y se les paga \$M por atender la llamada.
- Tiempo de ir y volver a atender una llamada $\sim$ exp(1 llamada/hora).
- Hay 3 patrullas (3 autos y 6 guardias), envían 1 auto y 2 guardias, es decir, envían 1 patrulla por emergencia.

(a) En las últimas 2 horas SOS ha recibido 15 llamadas. ¿Cuál es la probabilidad de que 10 de esas llamadas hayan sido falsas alarmas? Muestra tu desarrollo y/o justifica tu respuesta.

Solución:
Se puede resolver como una v.a binomial, donde $k = 10$ de $n = 15$, con $P(\text{falsa alarma}) = 0.8$.

$$\Rightarrow P = \binom{15}{10} \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^{5}$$

También, es posible resolverla definiendo procesos de poisson:

- $N_T(t) = \#$ total de llamadas
- $N_F(t) = \#$ total de llamadas falsas
- $N_R(t) = \#$ total de llamadas reales (Robo)

Por desagregación sabemos que $N_F(t) \sim \text{Poisson}(0.2 \cdot 5) = \text{Poisson}(1)$ y $N_R(t) \sim \text{Poisson}(0.8 \cdot 5) = \text{Poisson}(4)$. Además, por agregación sabemos que $N_T(t) = N_F(t) + N_R(t)$. Luego, lo que buscamos es:

$$P(N_F(2) = 10 | N_T(1) = 15) = \frac{P(N_F(2) = 10 \cap N_T(2) = 15)}{P(N_T(2) = 15)}$$

Sin embargo, N_F y N_T no son independientes. Pero como sabemos que $N_T(t) = N_F(t) + N_R(t) \Rightarrow 15 = 10 + N_R(t)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(N_F(2) = 10 | N_T(1) = 15) &= \frac{P(N_F(2) = 10 \cap N_R(2) = 5)}{P(N_T(2) = 15)} \\ &= \frac{P(N_F(2) = 10) P(N_R(2) = 5)}{P(N_T(2) = 15)} \end{aligned}$$

Como sabemos las distribuciones de cada uno de los procesos, se ha llegado a lo pedido.

(b) Se sabe que en este momento las tres patrullas de seguridad están atendiendo llamadas de emergencia. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llamada de emergencia deba ser transferida a carabineros? Justifica tu respuesta.

Solución:
Tendremos una carrera de exponenciales, para ver si una patrulla se desocupa primero ($\sim \exp(\mu = 1)$) o la llamada ocurre primero ($\sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$).

- $R \sim \exp(\mu = 1)$ = tiempo que demora la patrulla en revisar.
- $C \sim \exp(\lambda = 5)$ = llamadas.

Sea $S = \min(R, C)$ v.a.

$$S \sim \exp(3\mu + \lambda)$$

$$\Rightarrow P(S = C) = \frac{5}{8}$$

(c) En este momento hay una patrulla de seguridad disponible, ¿cómo se determina a qué casa enviarlo si se producen dos llamadas de emergencia simultáneamente?

Solución:
No es posible recibir dos llamadas simultáneamente, ya que el tiempo entre llamadas es exponencial y por lo tanto es un proceso estocástico de tiempo continuo.

(d) Se cortó la luz por 30 minutos y SOS no puede recibir llamadas si no hay electricidad. En dicho caso las llamadas pasan directamente a carabineros. ¿Cuánto dinero, en valor esperado, se debió pagar a carabineros, producto del corte de luz?

Solución:
Sea $L(t)$: cantidad de llamadas recibidas en un tiempo t.

El número esperado de llamadas que se recibe es:

$$\mathbb{E}[N(30 \text{ min})] = \mathbb{E}(N(0,5)) = 5\,\frac{\text{llamadas}}{\text{hora}} \cdot 0.5\,\text{horas} = 2.5\,\text{llamadas}$$

$\Rightarrow$ El costo esperado a pagar a carabineros es de \$ 2.5 M.

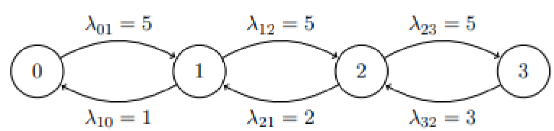
Ahora, se define $X(t)$ = número de patrullas trabajando (aquellos autos que están atendiendo llamadas de emergencia).

(e) ¿Es X(t) una cadena de Markov en tiempo continuo? Explique.

Solución:
Si, X(t) es una cadena de Markov en tiempo continuo, ya que vamos a tener un conjunto de estados discretos finitos (E = 0,1,2,3). Además, el tiempo de permanencia en cada esta es exponencial.

(f) Calcule la fracción del tiempo en que están todas las patrullas juntas en la central de SOS (se quiere ver si los guardias tienen tiempo para socializar)

Solución:
La cadena se hace de la siguiente manera:



Notemos que en el caso de ir de 3 patrullas disponibles a 2, así como de 2 a 1, existe carrera de exponenciales, ya se pasar entre estos estados será en el tiempo que menos se demore en desocuparse cada patrulla. Por ello se tomará el mínimo entre el tiempo de la primera, segunda y tercera patrulla, con lo que tendremos que será el $S = mín(T_1, T_2, , T_3)$, loS cuales cada uno distribuye exponencial con tasa 1, y por ello, se suman.

Y se obtiene:

Matriz de Intensidades:

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener las probabilidades estacionarias, resolvemos:

$$\pi Q = 0$$
$$\sum_i \pi_i = 1$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
$$-5\pi_0 + \pi_1 = 0$$
$$5\pi_0 - 6\pi_1 + 2\pi_2 = 0$$
$$5\pi_2 - 3\pi_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\pi_0 = \frac{3}{118}, \quad \pi_1 = \frac{15}{118}, \quad \pi_2 = \frac{75}{236}, \quad \pi_3 = \frac{125}{236}$$

Por lo tanto, todas las patrullas estarán juntas en la central $\frac{3}{118}$ del tiempo.

(g) ¿Cuánto dinero promedio diario se debe pagar a carabineros por atender llamadas debido a que no hay autos disponibles? (Considere un día donde no hay cortes de luz).

Solución:
El número esperado de llamadas recibidas en un día es de:

$$\mathbb{E}[N(24)] = 5 \cdot 24 = 120$$

Y si se espera no poder enviar patrullas a $\frac{125}{236}$ de esas llamadas, entonces hay

$$\frac{125 \cdot 120}{236} = 63.55$$

llamadas que pasarán a carabineros.

$$\Rightarrow \text{Habrá que pagarles \$63.55M diarios a carabineros}$$