Control 2

Pregunta 1 (PD-Estocástica)

Estamos en el mes del cáncer de mama, y a Ud. lo han contratado para diseñar la política de detección precoz del cáncer. Para ello, las mujeres entre 40 y 80 años pueden realizarse mamografías (a lo más una por año) de modo de poder detectar lo más tempranamente el cáncer.

Una mujer tiene una probabilidad p de desarrollar un tumor a la edad t (cada periodo es independiente), el que inicialmente estará en etapa 1 de gravedad (etapa temprana). Si no es tratado, cada año el tumor puede permanecer en etapa 1 con probabilidad q_1 y con probabilidad $1 - q_1$ puede evolucionar a la etapa 2 (etapa avanzada). Cuando se tiene un tumor en etapa 2, este se mantiene en etapa avanzada con probabilidad q_2 y con $1 - q_2$ la persona fallece.

Afortunadamente, una mamografía puede detectar el tumor ya sea en etapa 1 o 2 con completa certeza, y en ese caso la paciente se somete a tratamiento con un costo total C_1 y C_2 respectivamente. Estos costos consideran el tratamiento y seguimiento de la paciente de por vida (ya no se morirá por dicha enfermedad). Adicionalmente, el costo asociado a la muerte de una paciente es de C_3. Por simplicidad se asume que la mamografía se realiza al comienzo del año.

El costo de una mamografía es de C_0 y asuma que a la edad de 39 se está sano.

a) **(0.5 ptos)** ¿Cuál sería la estrategia óptima, si $C_3 = 0$?

b) **(1.5 ptos)** Sabiendo que en la edad t una paciente está sana, calcule (Pueden dejar las expresiones en términos de los resultados conocidos de Cadenas de Markov):

   i) La probabilidad de tener un tumor en etapa 1, en la edad $t + n$

   ii) La probabilidad tener un tumor en etapa 2 dado que sabemos que que la persona esta viva en $t + n$?

c) **(4 ptos)** Formule un modelo de programación dinámica que determine a que edades una mujer debe realizarse mamografías de modo de minimizar el costo total esperado (mamografías más tratamiento).

   Hint: Recuerde condicionar las probabilidades con el estar vivo.

Solución

a)

La estrategia óptima será no hacer mamografías, ya que en ese caso no se incurre en ningún costo.

b) i)

Para calcular esto, vemos la probabilidad de evolucionar a estado 1, en i años, y mantenerse en estado 1 en $n-i$ años:

$$P(Estado_1 \ en \ t+n \ \text{años}) = \sum_{i=1}^{n} (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot q_1^{n-i}$$

De forma alternativa, utilizando la propiedad de Cadenas de Markov la probabilidad pedida es:

$$P_{S,E1}^{(n)}$$

Donde $P^{(n)}$ es la matriz de transición elevada a n.

b) ii)

Para ver esto, necesitamos la intersección de eventos, evolucionar a estado 1 en i años, luego evolucionar a estado 2 en $i+k$ años y finalmente mantenerse en estado 2 en los $n-k-i$ años restantes. La probabilidad es:

$P(Estado_2 \ en \ t{+}n \ \text{años}|estar \ vivo) = \left[\sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-i} q_1^{k-1} \cdot (1-q_1) \cdot q_2^{n-i-k}\right)\right] \cdot \frac{\mathbb{1}_{[n\geq 2]}}{(1-P(\text{morir en n años})}$

$P(\text{morir en n años}) = \left[\sum_{i=1}^{n-2} (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-i-1} q_1^{k-1} \cdot (1-q_1) \cdot \left[\sum_{m=1}^{n-i-k} q_2^{m-1} \cdot (1-q_2) \cdot 1^{n-i-k-m}\right]\right)\right] \cdot \mathbb{1}_{[n\geq 3]}$

De forma alternativa, utilizando la propiedad de Cadenas de Markov la probabilidad pedida es:

$$\frac{P_{S,E2}^{(n)}}{1-P_{S,M}^{(n)}}$$

c)

- **Etapas:** Edad de la mujer, $T \in \{40, \dots, 80\}$
- **Variable de Decisión:**

$$x_t = \begin{cases} 1 & \text{realiza una mamografía a la edad} t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable de Estado:** S_t: Años desde la última mamografía sana
- **Recurrencia:**

$$S_{t+1} = \begin{cases} 1 & x_{t-1} = 1 \\ S_t + 1 & x_t = 0 \end{cases}$$

- **Función Objetivo:**

$$V_t(S_t) = \min_{x_t} \begin{cases} C_0 + C_1 \cdot P_1(S_t) + C_2 \cdot P_2(S_t) + P_S(S_t) \cdot V^*_{t+1}(S_{t+1}) & x_t = 1 \\ C_3 \cdot P_M(S_t) + (1 - P_M(S_t)) \cdot V^*_{t+1}(S_{t+1}) & x_t = 0 \end{cases}$$

En donde:

$$P_1(S_t) = P(Estado_1 \text{ en edad } S_t | Vivo) = \frac{P^{(S_t)}_{S,E_1}}{1 - P^{(S_t)}_{S,M}}$$

$$P_2(S_t) = P(Estado_2 \text{ en edad } S_t | Vivo) = \frac{P^{(S_t)}_{S,E_2}}{1 - P^{(S_t)}_{S,M}}$$

$$P_S(S_t) = P(Sano \text{ en edad } S_t | Vivo) = \frac{P^{(S_t)}_{S,S}}{1 - P^{(S_t)}_{S,M}}$$

$$P_M(S_t) = P(Estado_2 \text{ en edad } S_{t-1} | Vivo) \cdot (1 - q_2) = \frac{P^{(S_{t-1})}_{S,E_1}}{1 - P^{(S_{t-1})}_{S,M}} \cdot (1 - q_2)$$

Los casos se dividen en: si paciente se realiza una mamografía, paga los costos de esta y la esperanza de los costos de su estado de salud (si esta muerta no puede hacerse una mamografía, si esta sana no paga nada extra y continua al siguiente periodo). Recordar que si paciente es tratada en etapa 1 o 2 no sigue a la siguiente etapa (ya esta bajo tratamiento).

Por otro lado, si no se realiza mamografía, sólo podría pagar el costo de morir en ese periodo y sigue al siguiente con la probabilidad de seguir viva.

- **Condiciones de Borde:**
  - $A_{40} = 1$

- $A_{39} = 0$
- $V_{81}^*(S_{81}) = C_3 \cdot P_M(S_{81})$

Pregunta 2 (Cadenas de Markov)

Considere la composición de un comité parlamentario en el congreso Chileno. Dicho comité debe estar compuesto en cualquier momento por c de los N diputados de la cámara. Actualmente N_A de los diputados de la cámara militan por el partido A, y el resto (N_B) por el partido B. Suponga que $c < N_A$ y $c < N_B$ y que $N_A + N_B = N$.

Cada semana, un miembro del comité abandona su puesto y es reemplazado por un nuevo integrante. El proceso es el siguiente: cada diputado parte del comité nomina al azar a otro miembro del comité (excepto a sí mismo) para que abandone el comité. Los diputados al nominar a un miembro escriben su nominación en un papel, el cual es ingresado a una tómbola y luego se escoge un papel de forma aleatoria con el nombre del diputado que debe retirarse del comité. Por ejemplo, si un diputado es nominado dos veces por sus compañeros, se ingresan dos papeles con su nombre a la tómbola.

Para seleccionar al diputado que reemplazará al diputado que se retira del comité, todos los miembros de este (incluyendo al que se retira) nominan al azar a un diputado que no es miembro del comité ($N - c$). Esta nominación es escrita en un papel y luego ingresado en una tómbola, donde se selecciona al reemplazo de forma aleatoria.

a) **(1.5 ptos)** Modele la cantidad de miembros del partido A en el comité como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Explicite las probabilidades de transición entre los estados.

b) **(1.5 ptos)** Argumente si existen probabilidades estacionarias. En caso de existir, calcule la probabilidad que en el largo plazo el partido A tenga la mayoría en el comité (puede asumir c impar).

c) **(1.5 ptos)** Suponga que inicialmente el comité esta compuesto exclusivamente por militantes del partido A. ¿Cuanto tiempo toma (en esperanza) hasta que el comité esta compuesto exclusivamente por miembros del partido B? Deje el sistema de ecuaciones necesario para calcular esto de forma explícita.

Suponiendo que cada diputado - en caso de poder hacerlo - nomina para salir del comité a alguien del partido opuesto al propio, y nomina a entrar a alguien de su propio partido.

d) **(1.5 ptos)** Repita las partes a) y b) anteriores

Solución

a)

Para ver las probabilidades:

$$P(Sale\ A) = \frac{a}{c}$$
$$P(Sale\ B) = \frac{c-a}{c}$$
$$P(Entra\ A) = \frac{N_A - a}{N-c}$$
$$P(Entra\ B) = \frac{N_B - (c-a)}{N-c}$$

Por lo tanto:

$$P_{a,b} = \begin{cases} b = a+1 & P(Sale\ B) \cdot P(Entra\ A) = \frac{c-a}{c} \cdot \frac{N_A - a}{N-c} \\ b = a-1 & P(Sale\ A) \cdot P(Entra\ B) = \frac{a}{c} \cdot \frac{N_B-(c-a)}{N-c} \\ b = a & P(Sale\ A) \cdot P(Entra\ A) + P(Sale\ B) \cdot P(Entra\ B) = \frac{a}{c} \cdot \frac{N_A-a}{N-c} + \frac{c-a}{c} \cdot \frac{N_B-(c-a)}{N-c} \end{cases}$$

b)

Si se pueden encontrar las probabilidades estacionarias debido a que la cadena es irreducible y ergódica.

El sistema de ecuaciones para calcular se identifica mediante la siguiente fórmula:

$$\pi_i = \pi_i \cdot \left(\frac{i}{c} \cdot \frac{N_A - i}{N-c} + \frac{c-i}{c} \cdot \frac{N_B - c + i}{N-c} \right) + \pi_{i-1} \cdot \frac{c-i+1}{c} \cdot \frac{N_A - i + 1}{N-c} + \pi_{i+1} \cdot \frac{i+1}{c} \cdot \frac{N_B - c - i + 1}{N-c}$$

$$\pi_0 = \pi_0 \cdot \frac{N_B - c}{N-c} + \pi_1 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{N_B - c}{N-c}$$

$$\pi_c = \pi_c \cdot \cdot \frac{N_A - c}{N-c} + \pi_{c-1} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{N_A - c + 1}{N-c}$$

Con estas, es posible calcular la probabilidad según:

$$\sum_{i=\frac{c+1}{2}}^{c} \pi_i$$

c)

$$\mu_{i,0} = 1 + \sum_{j\neq 0} P_{i,k} \cdot \mu_{j,0} \quad \forall i \neq 0$$

d)

Para ver las probabilidades:

$$P(Sale\ A) = \frac{c-a}{c}$$
$$P(Sale\ B) = \frac{a}{c}$$
$$P(Entra\ A) = \frac{a}{c}$$
$$P(Entra\ B) = \frac{(c-a)}{c}$$

Por lo tanto:

$$P_{a,b} = \begin{cases} b = a+1 & P(Sale\ B) \cdot P(Entra\ A) = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \\ b = a-1 & P(Sale\ A) \cdot P(Entra\ B) = \frac{c-a}{c} \cdot \frac{c-a}{c} \\ b = a & P(Sale\ A) \cdot P(Entra\ A) + P(Sale\ B) \cdot P(Entra\ B) = \frac{c-a}{c} \cdot \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot \frac{(c-a)}{c} \\ b = 0 & si \ \ a = 0 \ \ con \ \ prob \ \ 1 \\ b = 1 & si \ \ a = 1 \ \ con \ \ prob \ \ 1 \end{cases}$$

Para ver la probabilidad, no existen ya que la cadena no es irreducible y no se puede calcular las probabilidades estacionarias.