Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
IN-3272 – Decisiones Bajo Incertidumbre

# Auxiliar Procesos de Poisson

**Profesores: Susana Mondschein y Denis Sauré**
Auxiliares: Ignacio Alarcón, Ailyn Carter, Antonia Díaz, Alfonso Ferrada, Felipe Fierro, Diego Kauer, Pedro Maldonado, Diego Moreno, Iván Vidal

## Pregunta 1: Problemas de recepción

Se ha determinado que durante un partido de voleibol, los errores de recepción del equipo que está defendiendo ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda$ errores por minuto de juego. Cuando se produce un error de recepción, hay una probabilidad $p$ de que el equipo contrario logre un punto directo (as, en caso de saque), y una probabilidad $q$ de que el error permita al equipo rival realizar un contraataque exitoso, ganando el punto. Notar que existen errores que no necesariamente terminan en punto del equipo rival.

El técnico de su equipo favorito pide tiempo muerto de 2 minutos cada vez que ocurre un problema de recepción que termine en punto. Suponiendo que no existen una cantidad máxima de tiempos muertos por set, además, el entrenador puede pedir tiempo muerto por otras razones distintas a los fallos en recepción.

a) Ud. llegó 2 minutos después de comenzar el primer set y notas que están en un tiempo muerto, calcule la probabilidad de que esto se deba a un fallo en recepción.

b) Acaba de terminar el primer set y tu equipo ha cometido 15 errores de recepción pero no han terminado en punto del equipo contrario, el técnico se comienza a preocupar, temiendo que en cualquier momento les hacen un punto directo (as). ¿Cual es la probabilidad de que en los primeros 3 minutos de juego del segundo set, tu equipo cometa almenos un error en recepción que termine en punto directo?

c) Suponga ahora que llegó 10 minutos después de empezar el primer set y sabe que ya ocurrió un as, además escucha que la transmisión online empezó 5 minutos tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que el error se haya transmitido?

# Solución

## a)

Definimos $N(t) = \#$fallos en recepción. hasta el minuto t..

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$N_d(t) = \#\text{fallos con punto directo}$$

$$N_c(t) = \#\text{fallos que termina en un contraataque exitoso del rival}$$

$$N_d(t) \sim \text{Poisson}(\rho\lambda)$$

$$N_c(t) \sim \text{Poisson}((1-\rho)\lambda)$$

Ocupando desagregación obtenemos:

$$N_d(t) \sim \text{Poisson}(p\lambda)$$

$$N_c(t) \sim \text{Poisson}(q\lambda)$$

$$N_3(t) = \#\text{fallos que terminan en punto hasta el minuto t}$$

Por agregación, se tiene que:

$$N_3(t) = N_d(t) + N_c(t) \sim \text{Poisson}((p+q)\lambda)$$

En la parte a) nos están preguntando lo siguiente:

$$P(N_3(2) \geq 1)$$

Ocupando la probabilidad del complemento se tiene:

$$P(N_3(2) \geq 1) = 1 - P(N_3(2) < 1) = 1 - P(N_3(2) = 0)$$

Reemplazando el valor de $P(N_3(2) = 0)$, se tiene:

$$P(N_3(2) \geq 1) = 1 - e^{-2(p+q)\lambda}$$

## b)

Debido a que los errores en recepción siguen una distribución de Poisson, se tiene la propiedad de pérdida de memoria, además al ser eventos independientes (los fallos que no terminan en punto y los que terminan en punto directo), se tiene que los errores del primer set no afectan la probabilidad de que ocurran en el segundo set.

Dado lo anterior, debemos calcular

$$P(N_d(3) \geq 1)$$

Ocupamos nuevamente el complemento y reemplazando el valor de la probabilidad de que $P(N_d(3) = 0$, tenemos como resultado:

$$P(N_d(3) \geq 1) = 1 - e^{-3(p)\lambda}$$

## c)

Nos están pidiendo calcular la probabilidad de que el error que terminó en punto directo haya ocurrido en entre el minuto 5 y el minuto 10, dado que se sabe que en el minuto 10 ya ocurrió un error en recepción que terminó en punto directo es decir:

$$P(N_d(5,10) = 1 | N_d(10) = 1)$$

Ocupando la definición de la probabilidad condicional nos queda:

$$P(N_d(5,10) = 1 | N_d(10) = 1) = \frac{P(N_d(5,10) = 1 \cap N_d(10) = 1)}{P(N_d(10) = 1)}$$

En el numerador, tenemos la probabilidad de que entre los minutos 5 y 10 haya un error que terminó en punto directo y que en los primeros 10 minutos, haya un error que terminó en punto directo. Esto lo podemos escribir como que en los primeros 5 minutos no hubo un error que terminó en punto directo y en los siguientes 5 minutos hubo 1, es decir:

$$\frac{P(N_d(5,10) = 1 \cap N_d(10) = 1)}{P(N_d(10) = 1)} = \frac{P(N_d(5,10) = 1 \cap N_d(5) = 0)}{P(N_d(10) = 1)}$$

Ahora por independencia entre intervalos disjuntos, tenemos:

$$\frac{P(N_d(5,10) = 1 \cap N_d(5) = 0)}{P(N_d(10) = 1)} = \frac{P(N_d(5,10) = 1) \cdot P(N_d(0,5) = 0)}{P(N_d(10) = 1)}$$

Por pérdida de memoria, se tiene que $P(N_d(5,10) = 1$ es igual a $P(N_d(5) = 1$, obteniendo así:

$$\frac{P(N_d(5,10) = 1 \cap N_d(5) = 0)}{P(N_d(10) = 1)} = \frac{P(N_d(5) = 1) \cdot P(N_d(5) = 0)}{P(N_d(10) = 1)}$$

Considerando las siguientes probabilidades:

$$P(N_d(5) = 1) = (5p\lambda)e^{-5p\lambda}$$

$$P(N_d(5) = 0) = e^{-5p\lambda}$$

$$P(N_d(10) = 1) = (10p\lambda)e^{-10p\lambda}$$

Reemplazando estas probabilidades, tenemos:

$$\frac{P(N_d(5)=1)\cdot P(N_d(5)=0)}{P(N_d(10)=1)} = \frac{(5p\lambda)e^{-5p\lambda}\cdot e^{-5p\lambda}}{(10p\lambda)e^{-10p\lambda}} = \frac{1}{2}$$

# Pregunta 2: Gala Industrial

Se acerca el final del semestre y con ello viene el último gran evento del CEIN, la **Gala Industrial**. Para este evento, se vendieron dos tipos de entradas: la entrada individual, para personas que asistirán solas, y la entrada que incluye un invitado (para aquellos que asistirán acompañados).

Durante tu investigación para organizar el evento, encuentras que las personas que compraron la entrada individual llegan al recinto según un proceso de Poisson con tasa $\lambda_i$ (personas por minuto). Por otro lado, las personas que compraron la entrada con un invitado llegan junto con su acompañante según otro proceso de Poisson con tasa $\lambda_d$ (grupos de dos personas por minuto). Además, tanto las personas individuales como los grupos llegan de manera independiente.

El objetivo es estudiar el flujo de asistentes al recinto, sabiendo que las personas permanecen en la gala por un tiempo exponencialmente distribuido. Las personas con entrada individual permanecen un tiempo distribuido exponencialmente con parámetro $\mu_i$ minutos, mientras que las personas con entrada doble, junto con su invitado, permanecen en promedio un tiempo exponencial con parámetro $\mu_d$ minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue al menos una persona en los primeros $\alpha$ minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un grupo de dos personas (entrada doble) antes de que llegue una persona con entrada individual?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que aumente la cantidad de personas en el recinto?

[Propuesto]: Para garantizar que los asistentes realmente hayan comprado su entrada, el CEIN implementa un sistema de acreditación (por simplicidad asumiremos que este rol lo realiza solamente una persona), y se demora un tiempo T (minutos), lapso donde se pierde la oportunidad de bailar las canciones que suenan de fondo. ¿Cuál es la probabilidad de que el CEIN las primeras 7 personas no tengan que hacer fila para ser acreditados?

# Solución

## a)

Comenzamos definiendo los procesos que nos describen en el enunciado

$$N_i(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_i) \quad \text{(Llegada individual)}$$

$$N_d(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_d) \quad \text{(Llegada pareja/dupla)}$$

$$N_{si}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_{si}) \quad \text{(Salida individual)}$$

$$N_{sd}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_{sd}) \quad \text{(Salida pareja/dupla)}$$

Definimos $N(t) = N_i + N_d(t)$, lo cual representa el proceso de Poisson que modela las llegadas (estas pueden ser individuales o en duplas). Nos piden calcular que en los primeros $\alpha$ minutos se tenga almenos 1 llegada, es decir:

$$P(N(\alpha) \geq 1) = 1 - P(N(t) = 0)$$

Por agregación de procesos de Poisson, tenemos que $N_d(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_i + \lambda_d)$

$$P(N(\alpha) \geq 1) = 1 - e^{-(\lambda_i + \lambda_d)\alpha}$$

## b)

Definiendo $X_i$ como el tiempo que transcurre entre la llegada de 2 personas individuales y $X_d$ transcurre entre la llegada de 2 parejas (sabiendo que ambos tiempos distribuyen exponencial), ocupamos el resulado conocido de una carrera de exponenciales, obteniendo:

$$P(X_i > X_d) = \frac{\lambda_d}{\lambda_d + \lambda_i}$$

## c)

Como nos piden calcular la probabilidad de que aumente la cantidad de personas en el reciento, es lo mismo que calcular la probabilidad de que llegue alguien antes de que se vaya alguien. Podemos definir los siguientes tiempos y calcular de inmediato ocupando el mismo resultado de la carrera de exponenciales.

$$X_3 : \text{Tiempo de alguna llegada}$$

$$X_4 : \text{Tiempo de alguna salida}$$

$$P(X_3 < X_4) = \frac{\lambda_d + \lambda_i}{\lambda_d + \lambda_i + \lambda_{si} + \lambda_{sd}}$$

Otra manera análoga, es mediante la definición de $X_{si}$ y $X_{sd}$ como los tiempos de salida de personas individuales y parejas respectivamente. Como nos piden calcular la probabilidad de que aumente la cantidad de personas en el reciento, es lo mismo que calcular la probabilidad de que llegue una persona individual o una pareja, antes que se vaya una persona individual o una pareja, es decir:

$$P(min\{X_i, X_d\} = min\{X_i, X_d, X_{si}, X_{sd}\})$$

$$= P(X_i = min\{X_i, X_d, X_{si}, X_{sd}\}) + P(X_d = min\{X_i, X_d, X_{si}, X_{sd}\})$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_d + \lambda_i + \lambda_{si} + \lambda_{sd}} + \frac{\lambda_d}{\lambda_d + \lambda_i + \lambda_{si} + \lambda_{sd}} = \frac{\lambda_d + \lambda_i}{\lambda_d + \lambda_i + \lambda_{si} + \lambda_{sd}}$$

# P3: Elecciones

Los votantes en la elección municipal llegan a un determinado local de votación según un proceso de Poisson de tasa $\lambda$. Cada votante, independiente de todo lo demás, vota con probabilidad 0.5 por el candidato A y con probabilidad 0.5 por el candidato B. Suponga que la votación comienza en $t = 0$ y dura indefinidamente.

1. Condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el candidato A reciba $n$ de estos votos?
2. Nuevamente, condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, encuentre la probabilidad de que el candidato A reciba $n$ votos en las primeras 4 horas de votación.
3. Sea $T$ el instante de la llegada del primer votante por A. Encuentre la densidad de $A$. Encuentre la función de probabilidad del número de votantes por B que llegan antes del primer votante por A.

# Solución

## a)

Comenzamos definiendo los procesos de Poisson relevantes:

$$N(t) = \#\text{votantes hasta } t \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Por desagregación, tenemos los siguientes 2 procesos:

$$N_A(t) = \#\text{votos A hasta t} \sim \text{Poisson}(0.5\lambda)$$

$$N_B(t) = \#\text{votos B hasta t} \sim \text{Poisson}(0.5\lambda)$$

En la parte a), nos piden calcular la siguiente probabilidad condicional:

$$P(N_A(10) = n | N(10) = 1000)$$

Ocupando la definición de la condicional, se tiene:

$$= \frac{P(N_A(10) = n \cap N(10) = 1000)}{P(N(10) = 1000)}$$

La probabilidad del numerador la podemos escribir de la siguiente manera:

$$= \frac{P(N_A(10) = n \cap N_B(10) = 1000) - n}{P(N(10) = 1000)}$$

Ahora en el numerador, nos quedaron 2 eventos independientes, por lo que ocupamos la independencia de las probabilidades, resultando:

$$= \frac{P(N_A(10) = n)P(N_B(10) = 1000 - n)}{P(N(10) = 1000)}$$

Reemplazamos por las respectivas probabilidades y obtenemos:

$$= \frac{\frac{(5\lambda)^n \cdot e^{-5\lambda}}{n!} \cdot \frac{(5\lambda)^{1000-n} \cdot e^{-5\lambda}}{(1000-n)!}}{\frac{(10\lambda)^{1000} \cdot e^{-10\lambda}}{1000!}}$$

$$= (\frac{1}{2})^{1000} \cdot \frac{1000!}{n!(1000-n)!}$$

## b)

Ahora nos están pidiendo calcular la siguiente probabilidad:

$$P(N_A(5) = n | N(10) = 1000)$$

Por definición de condicional, tenemos:

$$= \frac{P(N_A(5) = n \cap N(10) = 1000)}{P(N(10) = 1000)}$$

Ahora tenemos que tratar de escribir de alguna forma $P(N_A(5) = n \cap N(10) = 1000)$ de manera que nos queden eventos independientes y/o en intervalos disjuntos. Podemos notar, que $\{N_A(5) = n \cap N(10) = 1000\}$ es lo mismo decir que en las primeras 5 horas voten n personas por el candidato A y la suma de los votos para el candidato B en las primeras 5 horas más los votos totales entre las 5 y 10 horas sean igual a $1000 - n$. Resultando así:

$$= \frac{P(N_A(5) = n) \cap (\{N_B(5) + N(5, 10)\} = 1000 - n)}{P(N(10) = 1000)}$$

Por independencia, se tiene:

$$= \frac{P(N_A(5) = n) \cdot P(N_B(5) + N(5, 10) = 1000 - n)}{P(N(10) = 1000)}$$

El truco es definir $N^*(t) = N(t, 2t) + N_B(t)$:

$$N^*(t) \sim \text{Poisson}\,(1.5\lambda)$$

Resultando:

$$\frac{P(N_A(5) = n) \cdot P(N^*(5) = 1000 - n)}{P(N(10) = 1000)}$$

$$= \frac{(2.5\lambda)^n e^{-2.5\lambda} (7.5\lambda)^{1000-n} e^{-7.5\lambda}}{n!(1000-n)!}$$

$$= \frac{1000!}{n!(1000-n)!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{1000-n}$$

### c)

Como los votantes llegan e acuerdo a un proceso de Poisson($\lambda$), entonces se tiene el siguiente tiempo:

$$T : \text{tiempo entre las llegadas de los votantes} \sim \exp(\lambda)$$

$$T_A \sim \exp(\lambda_A)$$

$$\text{Por lo que la función de densidad es: } f_A(x) = \lambda_A e^{-\lambda_A x}$$

$$f_A(x) = 0.5\lambda e^{-0.5\lambda x}$$

## P4: Llamadas

Se tiene una central telefónica que recibe llamadas de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 5$ [llamadas/hora]. Se define con $N(t, t_0)$ el número de llamadas que se han recibido entre $t$ y $t_0$. El servicio ha comenzado a operar a las 7:00 de la mañana y se sabe que $N(7, 9) = 7$.

(a) Si el operador no ha recibido ninguna llamada desde las 8:45 hrs., ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente llamada ocurra antes de las 9:15 hrs.?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el operador esté ocioso por más de 40 minutos (comenzando a las 8:45)?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que a las 10:00 hrs. se hayan recibido 25 llamadas en total?

(d) Si el operador trabaja un turno de 8 horas, ¿cuántas llamadas recibirá en promedio? ¿Cuál será la varianza?

## Solución

Comenzamos definiendo el proceso de Poisson de interés.

$$N_t = \#\text{llamadas hasta } t \sim \text{Poisson}(5)$$

$$N(t, t_0) = N(t_0) - N(t)$$

### a)

Nos piden calcular la siguiente probabilidad

$$P(N(9.25) \geq 1 | N(8.75) = 0)$$

Por pérdida de memoria, esto es equivalente a:

$$= P(N(0,0.5) \geq 1) = 1 - e^{-2.5}$$

## b)

Ahora nos piden calcular la siguiente probabilidad:

$$P(N(8.75, 8.75 + \frac{2}{3}) = 0)$$

Nuevamente, por pérdida de memoria, esto es lo mismo que la probabilidad que en un lapso de $\frac{2}{3}$ horas no llegue ninguna llamada, es decir:

$$= P(N\left(\frac{2}{3}\right) = 0) = e^{-\frac{10}{3}}$$

## c)

$$P(N(7,10) = 25) = P(N(3) = 25)$$

Recordar:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Por lo tanto:

$$P(N(t) = 25) = \frac{(5 \cdot 3)^{25} e^{-5 \cdot 3}}{25!}$$
$$= \frac{15^{25} e^{-15}}{25!}$$

## d)

El número de llamadas que se espera recibir en un turno de $t = 8$ horas sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda t$, donde $\lambda = 5$ llamadas por hora. El valor esperado (promedio) se calcula como:

$$E[N(0,8)] = \lambda \cdot t = 5 \cdot 8 = 40 \text{ llamadas}$$

La varianza de un proceso de Poisson es igual al valor esperado. Por lo tanto, la varianza también será:

$$\text{Var}(N(0,8)) = \lambda \cdot t = 40$$