Pauta Auxiliar Extra C2

Cadenas de Markov en Tiempo Discreto III

Profesores: Susana Mondschein y Denis Sauré
Auxiliares: I. Alarcón, A. Carter, A. Díaz, A. Ferrada, F. Fierro,
D. Kauer, P. Maldonado, D. Moreno, I. Vidal

Pregunta 1 [Control 2 - Primavera 2022]

Desde hace un tiempo hasta ahora usted parece ser la última persona en su grupo de amigos en enterarse de los chismes jugosos. Por esto, usted se ha decidido a modelar la forma en que estos chismes se propagan. Para esto usted considera el grafo formado por su relaciones de amistad, $G = (N, A)$, donde N representa el conjunto de sus amigos (incluyendolo a ud.), amigos de sus amigos, etc., e $(i, j) \in A$ si las personas $i, j \in N$ son amigos entre ellos.

Supondremos que los chismes son descubiertos uno a la vez, y al azar, por una persona en N: cuando un chisme circula, al comienzo de cada hora alguien escogido al azar dentro del grupo de personas que conoce el chisme lo comunica a alguno de sus amigos directos: esto es, si la persona i comunica el chisme, lo comunica al azar a alguien dentro del conjunto $\{j : (i, j) \in A\}$, independiente de si esa persona ya conoce el chisme o no. También supondremos que mientras un chisme no es conocido por todas las personas en N, cada persona se niega a informase de otro chisme. Por otro lado, una hora después que todos las personas ya conocen un chisme, las personas empiezan a aceptar nuevos chismes. En este sentido, supondremos que la probabilidad que un chisme se genere al comienzo de una hora es p, caso en el cual, como se menciono arriba, es aprendido por una persona seleccionada al azar.

a) Modele la situación descrita arriba como una cadena de Markov en tiempo discreto.

b) Responda si la cadena de Markov admite probabilidades estacionarias. En el caso afirmativo, plantee un sistema que permita su cálculo.

c) Responda, que fracción del tiempo es usted el único entre sus amigos que no sabe un chisme? (Suponga que sus amigos son todas las personas en N.)

d) Responda, en que fracción de los chismes es usted el último en enterarse, entre sus amigos? (Suponga que sus amigos son todas las personas en N.)

Solución parte a). Consideramos como estado $S_n \subset N$ el conjunto de personas que en el periodo n conocen el chisme que circula. Podemos suponer que el estado inicial es $S_0 = \emptyset$, que consideramos equivalente al estado $S_n = N$ (por eso consideramos S_n subconjunto estricto de N): cuando todos se enteran de un chisme, es equivalente a que nadie sepa un chisme (el proceso se "resetea").

Si observamos estados posibles de esta cadena de Markov, estos de forma generalizada, serían:

1. Nadie sepa el chisme o todos sepan el chisme ($S = \emptyset$).

2. Sólo una persona sepa el chisme ($S = \{i\}, i \in N$)
3. Más de dos personas conocen el chisme ($1 < |S| < |N|$)
4. Todas las personas menos una conocen el chisme ($S = N \setminus \{i\}$)

Para definir una Cadena de Markov, se debe obtener las probabilidades de pasar de un estado a otro (probabilidades de transición). Con ello en mente, observamos que, al buscar las probabilidades $P_{S,S'}$, se tiene:

- $P_{S=N\setminus\{i\},S'=\emptyset} = P(\text{Todos sepan el chisme}|\text{Todos menos uno saben})$

  Esto implica calcular la probabilidad de que la persona i que no sabe el chisme, se entere del chisme. Para esto, debe ocurrir que un amigo directo de i, que llamaremos j, sea el que le cuente el chisme. Esto lleva asociado una probabilidad, que es:

  $$\frac{1}{|S|}$$

  Además, entre todos los amigos directos de j, le debe contar justo a i y no a otro de sus amigos. Esto se observa con la probabilidad:

  $$\frac{\mathbf{1}\{(j,i) \in A\}}{n_j}$$

  Con n_j número de amigos "directos" de $j \in N$.

  Luego, para considerar a todo el conjunto de personas que conocen el chisme, se realiza una sumatoria por sobre todas las personas que conocen el chisme. De esta manera, se obtiene:

  $$\frac{1}{|S|} \sum_{j \in S} \frac{\mathbf{1}\{(j,i) \in A\}}{n_j}$$

- $P_{S\neq\emptyset,S'=S\cup\{i\}} = P(\text{Una persona más se entere del chisme}|\text{Una persona o más saben el chisme})$

  Se observa que la situación es análoga a la anterior, ya que se debe calcular la probabilidad de que la persona i que no sabe el chisme, se entere del chisme, y para esto, debe ocurrir que un amigo directo de i, j, sea el que le cuente el chisme. Con este análisis, se obtiene que esta probabilidad de transición es igual a:

  $$\frac{1}{|S|} \sum_{j \in S} \frac{\mathbf{1}\{(j,i) \in A\}}{n_j}$$

  Es necesario encontrar esta probabilidad y la anterior, ya que la anterior indica la transición al estado base, $S = \emptyset$, mientras que esta muestra la transición en el medio de la cadena ($1 < |S| < |N|$)

- $P_{S=\emptyset,S'=\{i\}} = P(\text{Alguien se entere del chisme}|\text{Nadie sabe el chisme})$

  Para que alguien se entere del chisme, primero debe ocurrir un chisme y que i sea el que se entere del chisme (y no otro de los N amigos). Ello se relaciona con la probabilidad p de que aparezca un chisme y además de la probabilidad al azar que i sea quien se entera. Con ello, obtenemos que esto es igual a:

$$p \cdot \frac{1}{|N|}$$

- $P_{S=\emptyset,S'=\emptyset} = P(\text{Nadie sepa el chisme}|\text{Nadie sabe el chisme})$

  Esto quiere decir que debemos encontrar la probabilidad de que nadie más se entere. Si la probabilidad de que alguien se entere del chisme es p, entonces la probabilidad de que nadie se entere del chisme es:

$$1 - p$$

- $P_{S\neq\emptyset,S'=S} = P(\text{Nadie más se entere del chisme}|\text{Una persona o más saben el chisme})$

  Que nadie más se entere del chisme puede verse como "1 - P(alguno de los que no saben el chisme, se entere)". Para que alguno de los que no saben el chisme se entere, debe ocurir dos cosas: asumiendo que j sabe el chisme, debe ser j el que cuente el chisme y debe contarle a alguno de sus amigos que no conocen el chisme. Además, para considerar a todas las personas que conocen el chisme, se debe sumar por todos ellos. Así, se obtiene que esta probabilidad es:

$$1 - \frac{1}{|S|}\sum_{j\in S}\frac{n_j(S)}{n_j}$$

  Con $n_j(S)$ el número de amigos directos de j que no están en S, es decir, que no saben el chisme.

Con ello, obtenemos que la matriz de probabilidades de transición P es tal que el número de amigos directos de j que no están en S, es decir, no saben el chisme.

$$P_{S,S'} = \begin{cases} \frac{1}{|S|}\sum_{j\in S}\frac{\mathbf{1}\{(j,i)\in A\}}{n_j} & \text{si } S = N\setminus\{i\} \quad \& \quad S'=\emptyset, \\ \frac{1}{|S|}\sum_{j\in S}\frac{\mathbf{1}\{(j,i)\in A\}}{n_j} & S' = S\cup\{i\},\, S'\neq N,\, S\neq\emptyset, \\ \frac{p}{|N|} & S=\emptyset,\, S'=\{i\}, \\ 1-p & S=\emptyset,\, S'=S, \\ 1-\frac{1}{|S|}\sum_{j\in S}\frac{n_j(S)}{n_j} & S=S',\, S\neq\emptyset. \end{cases}$$

donde $n_j := |\{i\in N : (j,i)\in A\}|$ representa el número de amigos "directos" de $j\in N$, y $n_j(S) := |\{i \in N\setminus S : (j,i)\in A\}|$ es el número de amigos directos de j que no están en S.

Solución parte b) Vemos que todos los estados se comunican entre si, por lo que la cadena tiene una única clase recurrente (numero de estados finito). Además tenemos que $P_{\emptyset,\emptyset} = (1-p) > 0$, por lo que los estados son aperiódicos. Concluimos que existe un vector de probabilidades estacionarias. Teniendo en cuenta las fórmulas:

$$\sum_{i\in N}\pi_i = 1$$

$$\pi_j = \sum_{i\in N}\pi_i \cdot p_{ij}$$

Con i los estados que dan acceso a j.
Para calcularlas se plantea el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
\pi_\emptyset &= (1-p)\,\pi_\emptyset + \sum_{i\in N} \frac{1}{|N|-1}\left(\sum_{j\in N\setminus\{i\}} \frac{\mathbf{1}\{(j,i)\in A\}}{n_j}\right)\pi_{N\setminus\{i\}} \\
\pi_{\{i\}} &= \frac{1}{N}\,p\,\pi_\emptyset, \quad i\in N \\
\pi_S &= \left(1-\frac{1}{|S|}\sum_{j\in S}\frac{n_j(S)}{n_j}\right)\pi_S + \sum_{i\in S}\frac{1}{|S|}\left(\sum_{j\in S\setminus\{i\}}\frac{\mathbf{1}\{(j,i)\in A\}}{n_j}\right)\pi_{S\setminus\{i\}},\ 1<|S|<|N|, \\
\sum_{S\subset N}\pi_S &= 1 \\
\pi_S &\geq 0 \quad S\subset N.
\end{aligned}
$$

Nota 1. En el cálculo de $\sum_{S\subset N}\pi_S = 1$, se considera S como cada uno de los estados que existen en la cadena de markov. Esto es, se sumaría $\pi_\emptyset + \pi_{\{i\}} + \pi_{\{i'\}} + ... + \pi_{\{i,j\}} + ... + \pi_{N\setminus\{i\}} = 1$

Nota 2. El cálculo de $\pi_{N\setminus\{i\}}$ no se explicita, ya que este se obtiene de forma recursiva hasta llegar al caso base de $\pi_{\{k\}}$, de la forma

$$\pi_{N\setminus\{i\}} = \pi_{N\setminus\{i,j\}}\cdot P_{N\setminus\{i,j\},N\setminus\{i\}}$$

Hasta llegar a que exista un sólo elemento, que será $\pi_{\{k\}}$.

Solución parte c) Respondemos en términos de las probabilidades estacionarias. La fracción del tiempo en que la persona $i\in N$ es la única que desconoce el chisme actual es $\pi_{N\setminus\{i\}}$.

Solución parte d) En el largo plazo, vemos quetendremos que calcular:

$$\frac{\text{número promedio de veces en que i es el último en enterarse}}{\text{número promedio de chismes generados por unidad de tiempo}}$$

Dado que en el largo plazo, cuando algún amigo directo de i se entera del chisme, i será el último en enterarse si j le cuenta a todos sus otros amigos antes que a i. Luego, por unidad de tiempo, en promedio, el número de veces en que la persona $i\subset N$ se convierte en la última en enterarse de un chisme es

$$\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\pi_{N\setminus\{j,i\}}\left(\frac{1}{|N-2|}\sum_{h\in N\setminus\{j,i\}}\frac{\mathbf{1}\{(h,j)\in A\}}{n_h}\right).$$

Por otra parte, el número de chismes que se generan por unidad de tiempo, en promedio, en el largo plazo, es

$$\pi_\emptyset\,p.$$

Concluimos que en el largo plazo, en promedio, el porcentaje de chismes en lo que la persona i es la última en enterarse es

$$\frac{\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\pi_{N\setminus\{j,i\}}\left(\frac{1}{|N-2|}\sum_{h\in N\setminus\{j,i\}}\frac{\mathbf{1}\{(h,j)\in A\}}{n_h}\right)}{\pi_\emptyset\,p}.$$

Pregunta 2 [Examen - Primavera 2023]

(Saltar si conoce el cubo Rubik) Cada cara de un cubo Rubik muestra 9 cuadrados de colores en un arreglo de 3 x 3. Cada cuadrado muestra uno de 6 colores posibles, y en total (en el cubo) hay 9 cuadrados con un mismo color (por cada color). Es posible **rotar** filas o columnas de una cara, de forma de cambiar la configuración de colores de las caras del cubo. El desafío del cubo Rubik consiste **armar** el cubo (esto es, llevarlo a la configuración donde cada una de sus caras contiene cuadrados con un mismo color).

Para fines de esta pregunta supondremos que alguien contó y enumeró las posibles configuraciones de colores del cubo, de forma que se sabe que colores van en cada cara en la configuración j-esima, para $j \in \{1, \ldots, N\}$ donde N denota el número de configuraciones posibles. Así mismo, usted sabe que a partir de la configuración j es posible llegar a las configuraciones en $A_j \subseteq \{1, ..., N\}$. Las configuraciones están enumeradas de forma que la configuración 1 corresponde al cubo armado.

a) Suponga que usted comienza a rotar filas/columnas del cubo sin mirar el resultado, durante mucho tiempo. Encuentre la probabilidad que al parar encuentre el cubo armado (utilice cadenas de Markov en tiempo discreto).

b) Para una configuración inicial cualquiera del cubo, utilice programación dinámica para minimizar el número de rotaciones necesarios para armar el cubo.

Solución parte a) El estado de la cadena es la configuración del cubo, y los periodos son las rotaciones. Dada una configuración, si elegimos la siguiente configuración al azar, la dinámica es Markoviana. La matriz de transiciones de probabilidad $P \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es tal que

$$P_{ij} = \begin{cases} |A_i|^{-1} & \text{si } j \in A_i \\ 0 & \sim . \end{cases}$$

Suponiendo que la cadena es aperiódica, la probabilidad buscada es π_1 donde π es el vector de probabilidades estacionarias.

(Esto no es necesario.) Por otro lado, pensando que las configuraciones son equiprobales, se puede deducir que $\pi_i = \frac{1}{N}$. Esto viene de observar que la matriz P es doblemente estocástica (filas y columnas suman 1), o razonando por simetría.

Solución parte b) Este es un problema determinista, y de horizonte infinito (en realidad es finito, porque siempre se puede armar el cubo en a lo mas 26 movidas).

- **Periodos.** Las rotaciones.
- **Estado.** e la configuración actual del cubo
- **Decisión.** $a \in A_e$ La siguiente configuración del cubo.
- **Recesión de estado.** El siguiente estado es la decisión tomada.
- **Bellman**.

$$\begin{aligned} V(e) &= \min_{a \in A_e}\{1 + V(a)\} \quad e \neq 1 \\ V(1) &= 0. \end{aligned}$$

Pregunta 3 [Control 2 - Otoño 2024]

Considere el siguiente juego entre usted y un amigo: una moneda justa se lanza reiteradamente y se observa la secuencia de caras (C) y sellos (S) producida; cada vez que hayan dos S seguidos usted gana 1 punto; cada vez que haya un S seguido de una C, su amigo gana un punto; gana el jugador que tenga más puntos al cabo de n lanzamientos. Si ambos tienen el mismo puntaje, hay un empate y no gana ninguno. Por ejemplo, si $n = 5$ y la secuencia resulta ser SSSCC, usted obtiene dos puntos debido a que la secuencia SS ocurre dos veces (lanzamientos 2 y 3) y su amigo obtiene un punto, ya que la secuencia SC ocurre 1 vez (lanzamiento 4).

a) Calcule la probabilidad de ganar el juego cuando $n = 3$.

Suponga que n es muy, muy grande. Usted le quiere mostrar a su amigo que, en el largo plazo, ambos tienen la misma probabilidad de ganar.

b) Formule una cadena de Markov que le permita monitorear la tasa a la cual los jugadores ganan puntos. Calcule las probabilidades estacionarias asociadas a la cadena, en el caso que estas existan.

c) Argumente que en el largo plazo, ambos jugadores acumulan puntos a la misma tasa. Compare este resultado con el de la parte a).

Usted le propone el siguiente juego alternativo a su amigo: usted gana cuando se observa la secuencia CCSS por primera vez, y su amigo gana cuando se observa la secuencia SSS por primera vez. Por ejemplo en la secuencia CSSS gana su amigo (lanzamiento 4) y en la secuencia CCCSS gana usted (lanzamiento 5).

d) Plantee un sistema de ecuaciones que le permite calcular la probabilidad de ganar este juego alternativo.

Solución parte a) Existen 8 posibles secuencias, cada ocurre con probabilidad 1/8.

Secuencia	Puntos Ud.	Puntos Amigo	Ganador
CCC	0	0	Empate
CCS	0	0	Empate
CSS	1	0	Ud.
CSC	0	1	Amigo
SCC	0	1	Amigo
SCS	0	1	Amigo
SSS	2	0	Ud.
SSC	1	1	Empate

Concluimos que la probabilidad de ganar el juego es 2/8.

Solución parte b) Definamos una cadena donde los periodos son los lanzamientos, y los estados son los patrones de las últimos lanzamientos (esta es una de múltiples posibilidades, algunas mas sencillas, otras mas complejas). Enumeramos los patrones con el siguiente orden: SS, SC, CC, CS. Con este ordenamiento, la cadena de Markov queda definida por la matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La cadena consta de una única clase recurrente (dado que es finita) y aperiódica (notar que $P_{1,1} > 0$). Es fácil chequear que $\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ es el vector de probabilidades estacionarias (notar que P es doblemente estocástica - filas y columnas suman 1).

Solución parte c) En el largo plazo estamos visitando los estados SS y SC con la misma frecuencia, es decir ambos jugadores acumulan puntos con la misma frecuencia. Este resultado difiera del de la parte a), donde se muestra que en el transiente el amigo tiene la ventaja.

Solución parte d) Podemos repetir lo realizado en la parte b), notando que tendremos dos estados absorbentes. Alternativamente, podemos directamente plantear el sistema. Sea $\mathbb{P}(X)$ la probabilidad que usted gane, condicional que el ultimo patrón observado es X. Con esto, tenemos que condicionando en el resultado del próximo lanzamiento,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(CC)/2 + \mathbb{P}(CS)/2 \\
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(SC)/2 + \mathbb{P}(SS)/2 \\
\mathbb{P}(CC) &= \mathbb{P}(CCC)/2 + \mathbb{P}(CCS)/2 \\
\mathbb{P}(SS) &= \mathbb{P}(SSC)/2 + \mathbb{P}(SSS)/2 \\
\mathbb{P}(CS) &= \mathbb{P}(CSC)/2 + \mathbb{P}(CSS)/2 \\
\mathbb{P}(SC) &= \mathbb{P}(SCC)/2 + \mathbb{P}(SCS)/2.
\end{aligned}$$

Antes de escribir mas ecuaciones, notamos que $\mathbb{P}(CS) = \mathbb{P}(S)$, $\mathbb{P}(SC) = \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(CCC) = \mathbb{P}(CC)$, $\mathbb{P}(SSC) = \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(SSS) = 0$, $\mathbb{P}(CSC) = \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(CSS) = \mathbb{P}(SS)$, $\mathbb{P}(SCC) = \mathbb{P}(CC)$, y $\mathbb{P}(SCS) = \mathbb{P}(S)$, con las ecuaciones de arriba se simplifican a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(CC)/2 + \mathbb{P}(S)/2 \\
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(C)/2 + \mathbb{P}(SS)/2 \\
\mathbb{P}(CC) &= \mathbb{P}(CC)/2 + \mathbb{P}(CCS)/2 \\
\mathbb{P}(SS) &= \mathbb{P}(C)/2.
\end{aligned}$$

Adicionalmente tenemos que

$$\mathbb{P}(CCS) = \mathbb{P}(CCSC)/2 + \mathbb{P}(CCSS)/2 = \mathbb{P}(C)/2 + 1/2.$$

Con esta ultima ecuación completamos un sistema lineal de 5 ecuaciones y 5 incógnitas.