Auxiliar 6

Cadenas de Markov en Tiempo Discreto II

Profesores: Susana Mondschein y Denis Sauré
Auxiliares: I. Alarcón, A. Carter, A. Díaz, A. Ferrada, F. Fierro,
D. Kauer, P. Maldonado, D. Moreno, I. Vidal

Pregunta 1

Usted quiere irse a acampar al Club Hípico y necesita saber cómo estará el clima. Decide preguntarle al dueño de su botillería favorita, Boticheli, que además es un meteorólogo experto. Cada día el clima puede ser bueno, malo o regular, pero nunca tiene dos días seguidos con el mismo clima. Además, si en dos días seguidos el clima es regular y malo (en cualquier orden), el tercer día será bueno. Por otro lado, si en dos días seguidos el clima es bueno y regular (en cualquier orden), el tercer día tendrá mal clima con probabilidad p, y si en dos días seguidos el clima es bueno y malo (en cualquier orden), el tercer día tendrá clima regular con probabilidad q.

a) Modele la situación anterior como una Cadena de Markov en tiempo discreto. Escriba la matriz de transición y clasifique los estados.

Solución:
Para modelar esta situación como una cadena de Markov, definimos los estados como tuplas que representan el clima de los últimos dos días. Los estados posibles son:

$$\mathrm{MR}, \mathrm{RM}, \mathrm{MB}, \mathrm{BM}, \mathrm{RB}, \mathrm{BR}$$

Donde:

- M: Clima malo
- R: Clima regular
- B: Clima bueno

La matriz de transición P para esta cadena de Markov es la siguiente:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & \mathrm{MR} & \mathrm{RM} & \mathrm{MB} & \mathrm{BM} & \mathrm{RB} & \mathrm{BR} \\ \hline \mathrm{MR} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{RM} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{MB} & 0 & 0 & 0 & 1-q & 0 & q \\ \mathrm{BM} & q & 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{RB} & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ \mathrm{BR} & 0 & p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{array}$$

Todos los estados pertenecen a una única clase recurrente, ya que es posible llegar desde cualquier estado a cualquier otro.

b) Si el primer día fue malo y el segundo bueno, ¿cuál es la probabilidad de que el cuarto día sea bueno?

Solución:
Para calcular la probabilidad de que el cuarto día sea bueno, dado que el primer día fue malo y el segundo día fue bueno, necesitamos calcular la probabilidad de que el sistema pase de MB al estado B en dos pasos.

La probabilidad se puede calcular elevando la matriz de transición al cuadrado y sumando las entradas correspondientes:

$$P^2_{MB,MB} + P^2_{MB,RB} = (1-q)^2 + q(1-p)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el cuarto día sea bueno es:

$$(1-q)^2 + q(1-p)$$

Pregunta 2 (C2 2021-1)

Considere un paciente que se acaba de infectar con Covid-19 y por lo tanto está en lo que se conoce como período de Incubación (I), donde aún no es contagioso para el resto de la población. Cada día puede permanecer en dicho estado con probabilidad 0.2, o avanzar a los estados Sintomático (S) o Asintomático (A), con probabilidad 0.4 a cada uno de ellos. En estos dos estados (S y A), el contagiado ya puede contagiar a otras personas.

Si el enfermo es asintomático, entonces permanece cada día en este estado con probabilidad 0.5 o en caso contrario avanza al estado de Recuperado (R).

Si el enfermo es sintomático, entonces puede permanecer otro día en ese estado con probabilidad 0.5, puede Recuperarse (R) con probabilidad 0.2, o en su defecto pasa a estar Hospitalizado (H). En este último caso, cada día permanece hospitalizado con probabilidad 0.6, con probabilidad 0.1 pasa a Recuperado, y lamentablemente puede también morir (M). Un paciente recuperado no se puede enfermar de nuevo.

(a) Dibuje el grafo de esta Cadena de Markov, e identifique las clases de estados y su clasificación.

Solución:
Consideramos el conjunto de estados $E = \{I, S, A, R, H, M\}$ como se describen en el enunciado, por lo que el dibujo con las transiciones respectivas queda como sigue:

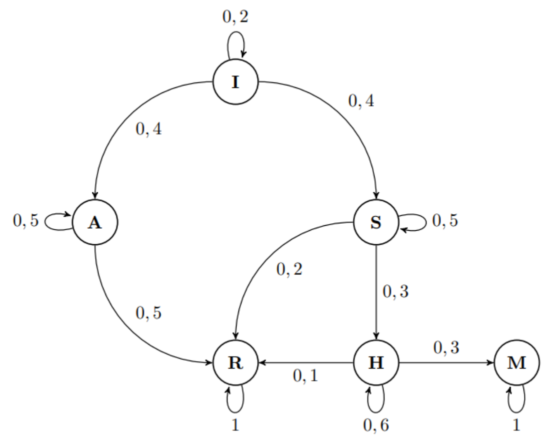

Figura 1: Cadena de Markov.

Además, las clases existentes son $\{I\}$, $\{A\}$, $\{S\}$, $\{R\}$, $\{H\}$, $\{M\}$, donde R, M son clases recurrentes (además de ser estados absorbentes), y el resto de las clases son transientes, ya que pueden acceder a otras clases. Como son clases transientes, también son estados transientes.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo sintomático muera producto de la enfermedad?

Solución:
Dado que nos preguntan la probabilidad de que un enfermo sintomático muera, esto implica encontrar la probabilidad de que vaya por primera vez del estado S al M. Así, hay que obtener f_{SM}, usamos la siguiente fórmula:

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^{N} p_{ik} \cdot f_{kj}, \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, N\}$$

Con la cual planteamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{SM} &= p_{SS} f_{SM} + p_{SH} f_{HM} + p_{SR} f_{RM} \\ f_{HM} &= p_{HH} f_{HM} + p_{HM} f_{MM} + p_{HR} f_{RM} \end{aligned}$$

Reemplazando, obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{SM} &= 0.5 f_{SM} + 0.3 f_{HM} + 0.2 \cdot 0 \\ f_{HM} &= 0.6 f_{HM} + 0.3 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0 \end{aligned}$$

Resolviendo, se obtiene que $f_{SM} = 0,45$.

(c) En el momento que un paciente es hospitalizado, ¿cuál es el número promedio de días que permanece en el hospital?

Solución:
Para resolver esta pregunta se puede abordar de varias maneras. En todas ellas se utiliza la fórmula:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n) & \text{si } f_{ij} = 1 \\ \infty & \text{si } f_{ij} < 1 \end{cases}$$

Que a su vez, al utilizar probabilidades totales, se traduce en:

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j}^{N} p_{ik} \cdot u_{kj}$$

El cual se define como “el número de períodos que toma pasar de un estado i a un estado j”.

Es necesario recordar que el número 1 de la fórmula surge debido a que para salir del estado i al k sí o sí es necesario dar 1 paso. Además, el número de períodos que toma pasar de un estado i a un estado i es 0, $\mu_{ii} = 0$, siendo esta la razón de porqué se utiliza la fórmula con $k \neq j$.

El caso donde $\mu_{ii} = \infty$ ocurre cuando se tiene un estado transiente, donde por definición $f_{ii} = 0$, por lo que según la primera definición de μ_{ij}, este debería ser infinito.

Alternativa 1: Esta forma de ver este ejercicio es la más intuitiva, pero no es la más correcta, dado que si utilizamos la definición como tal, tendríamos que $\mu_{HM} = \infty$, dado que encontramos que $f_{HM} < 1$, lo mismo con μ_{HR}.

Sin embargo, haremos el ejercicio con esta alternativa para desarrollar la intuición, pero asumiendo $\mu_{R,M} = \mu_{M,R} = 0$. Utilizamos la cadena original y calculamos el promedio entre $\mu_{H,M}$ y $\mu_{H,R}$. Esto es debido a que se llega a dos estados absorbentes, donde sólo se podrá estar en uno de ellos a la vez. Observamos la cadena original para observar a qué nodos puede acceder H:

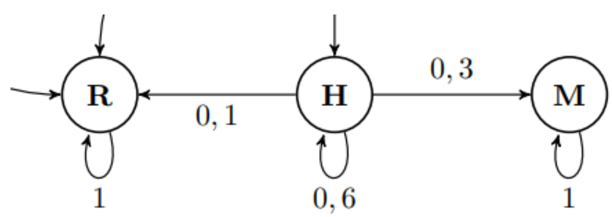

Figura 2: Cadena de Markov desde H.

Con ello, obtenemos las ecuaciones:

$$\mu_{H,M} = 1 + p_{H,H} \cdot \mu_{H,M} + p_{H,R} \cdot \mu_{R,M}$$

$$\mu_{H,R} = 1 + p_{H,H} \cdot \mu_{H,R} + p_{H,M} \cdot \mu_{M,R}$$

En este caso particular, asumimos que $\mu_{R,M} = \mu_{M,R} = 0$

Reemplazando se obtiene:

$$\mu_{H,M} = 1 + 0.6 \cdot \mu_{H,M} + 0.1 \cdot 0$$

$$\mu_{H,R} = 1 + 0.6 \cdot \mu_{H,R} + 0.3 \cdot 0$$

Y resolviendo, se llega a que $\mu_{H,R} = 2,5$ y $\mu_{H,R} = 2,5$, por lo que al obtener su promedio, se obtiene que el tiempo promedio de días que permanece en el hospital es de 2,5 días.

Alternativa 2 (aceptada en el control): Consideramos una cadena de Markov con el estado H y el estado RM donde el último es la agrupación de los estados absorbentes a los cuales se puede ir desde H. Por lo tanto, la cadena queda como sigue:

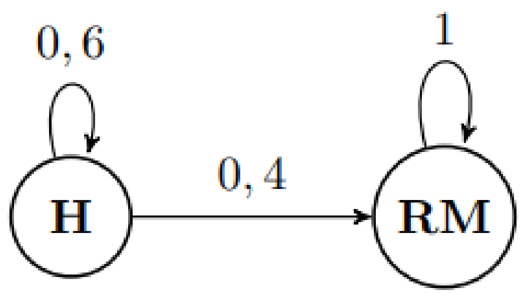

Figura 3: Cadena de Markov con estados absorventes reducidos.

Entonces, hay que obtener $\mu_{H,RM}$. Primero, notamos que $f_{H,RM} = 1$, puesto que la probabilidad de llegar a RM desde H es la misma que la probabilidad de salir de H en algún período, donde esta última es 1, ya que la probabilidad de salir de H es positiva.

Así, podemos usar la siguiente ecuación para obtener lo pedido:

$$\mu_{H,RM} = 1 + p_{H,H} \cdot \mu_{H,RM}$$

Se resuelve y se obtiene que $\mu_{H,RM} = 2,5$.

Alternativa 3: Se pide la esperanza de cuántos períodos me demoro en salir de H ya estando ahí.

Definimos la variable aleatoria X = "períodos que se permanece en H". Entonces

$$P(X = k) = 0,6^{k-1} \cdot 0,4$$

Entonces,

$$E(X) = \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k)$$

$$= \sum_{k \geq 1} k \cdot 0,6^{k-1} \cdot 0,4$$

$$= \frac{0,4}{0,6} \cdot \sum_{k \geq 1} k \cdot 0,6^k$$

$$= \frac{0,4}{0,6} \cdot \frac{0,6}{(1 - 0,6)^2} = 2,5$$

donde la última igualdad se obtuvo de la suma conocida:

$$\sum_{k \geq 1} k \cdot a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}$$

cuando $a < 1$.

(d) Considere un paciente que acaba de presentar síntomas e ingresa al sistema de monitoreo Epivigila, en el cual un enfermero lo llama todos los días para monitorear sus síntomas. Esto ocurre incluso si el paciente está hospitalizado. ¿Cuántos días, en promedio, será llamado?

Solución:
Es análoga a la situación anterior. Consideramos ahora una cadena de Markov con estados H, S y el estado agrupado T que agrupa los estados absorBentes. De esta forma, el número promedio de días en que el paciente es monitoreado es justo la esperanza de la cantidad de pasos de la cadena hasta llegar a T.

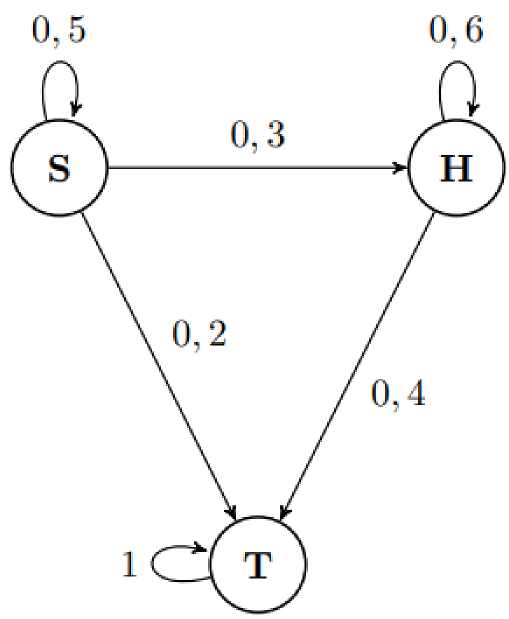

Figura 4: CMTD reducida.

Entonces, se desea obtener $\mu_{S,T}$. Notamos que $f_{S,T} = 1$, pues la probabilidad de salir de S es 1, ya que tiene transición hacia afuera con probabilidad positiva.

Luego, si al salir de H se llega a T, se cumple llegar al estado deseado, mientras que si llega a H, por la misma razón anterior, la probabilidad de salir de H es 1, y la única manera de salir de H es entrando a T, por lo tanto, la probabilidad de llegar de S a T es 1.

Entonces, podemos usar la ecuación para obtener $\mu_{S,T}$.

$$\mu_{S,T} = 1 + p_{SS} \cdot \mu_{S,T} + p_{SH} \cdot \mu_{H,T}$$

$$\mu_{H,T} = 1 + p_{HH} \cdot \mu_{H,T}$$

Resolviendo, se obtiene que $\mu_{S,T} = 3,5$.

Considere ahora a una persona sana (G) y vacunada con la super vacuna Chao-Covid, con la cual la probabilidad de morir o ser hospitalizado por Covid-19 es 0 una vez vacunado. Consideremos una persona con alto riesgo de enfermarse dado su trabajo, el cual lo mantiene en contacto directo con el virus. La probabilidad diaria de contagiarse, aun vacunado, es de 0.1. En caso de enfermarse, el período de incubación dura exactamente un día y de ahí pasa a ser un enfermo sintomático o asintomático, ambas con probabilidad 0.5.

Si es sintomático, la probabilidad de permanecer otro día en el mismo estado es de 0.7 y de recuperarse es de 0.3. Si es asintomático, la probabilidad de permanecer otro día en el mismo estado es de 0.5 y de recuperarse es de 0.5.

Lamentablemente, aún si se ha recuperado de la enfermedad, puede volver a contagiarse, pero con una probabilidad más baja de 0.01. Si se vuelve a infectar, se reproduce el mismo proceso viral como si se hubiese enfermado por primera vez.

(e) Dibuje la nueva cadena de Markov e identifique las clases de estados.

Solución:
Modelamos la evolución de una persona sana y vacunada considerando 5 estados, $E = \{G, I, S, A, R\}$, representando su estado de salud. Esto resulta en la cadena de la Figura 4, donde notamos que G forma una clase transiente, y los estados restantes son una clase recurrente.

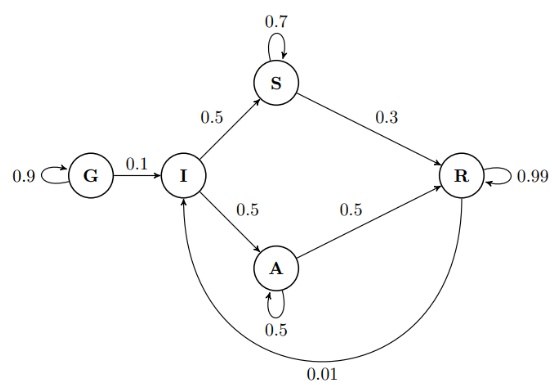

Figura 5: Cadena de Markov nueva.

(f) Si el costo de encontrarse en el estado Sintomático es de $30.000, ¿cuál es el costo promedio, en el largo plazo?

Solución:
Como vimos en e), la cadena tiene una sola clase final (además de la transiente), que resulta ser aperiódica, entonces existe probabilidad estacionaria única, donde la probabilidad de caer en G es 0, y las demás se calculan resolviendo el sistema:

$$\sum_{i \in N} \pi_i = 1$$

$$\pi_j = \sum_{i \in N} \pi_i \cdot p_{ij}$$

Sabiendo que debemos obtener π_S para poder obtener la *fracción del tiempo en que se está en el estado S (Sintomático) en el largo plazo*, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\pi_S = \pi_I \cdot 0,5 + \pi_S \cdot 0,7$$

$$\pi_I = \pi_G \cdot 0,1 + \pi_R \cdot 0,01$$

$$\pi_R = \pi_S \cdot 0,3 + \pi_A \cdot 0,5 + \pi_R \cdot 0,99$$

$$\pi_A = \pi_I \cdot 0,5 + \pi_A \cdot 0,5$$

$$1 = \pi_I + \pi_S + \pi_A + \pi_R$$

Con estos valores, se procede a resolver el sistema de ecuaciones, con lo que obtenemos $\pi_I = 0,01$, $\pi_S = 0,02$, $\pi_A = 0,01$, $\pi_R = 0,96$, y el costo promedio a largo plazo es de $30.000 \cdot \pi_S = 600$ pesos.

Pregunta 3

Un estudiante de ingeniería civil industrial está interesado en emprender con una tienda de cosméticos online. Al comienzo de cada semana, el estudiante puede tomar acción para comenzar el emprendimiento o no. La probabilidad de que el estudiante tome acción es del 0.5, en caso contrario seguirá siendo solo una idea.

Una vez que el estudiante ha tomado acción, hay tres posibles resultados para la siguiente semana: (1) con probabilidad del 0.6, el estudiante pospone el emprendimiento debido a que la semana universitaria es muy dura, volviendo a la etapa de solo una idea; (2) con probabilidad del 0.1, el estudiante decide desistir del emprendimiento y no volver a intentarlo; y (3) con probabilidad del 0.3, el estudiante inicia su emprendimiento y tiene demanda alta para la proxima semana.

Una vez iniciado el emprendimiento, con probabilidad 0.3 habrá demanda alta en una semana, lo que genera una ganancia de 500000 CLP para el estudiante, con probabilidad 0.5 habrá demanda baja, lo que genera ganancias de 300000 CLP al estudiante y con probabilidad 0.2 se quedara sin stocks, lo que implicaría un costo de 200000 CLP (en esa semana no hace ventas). Cuando el estudiante esta sin stock las probabilidad de pasar a demanda baja y alta son del 0.8 y 0.2 respectivamente.

(a) Modele el problema como una cadena de Markov, clasifique los estados y escriba la matriz transición.

Solución:
Del enunciado podemos notar que la cadena de Markov tiene 6 estados: Idea (I), Tomar Acción (TA), Demanda Alta (DA), Sin Stock (SS), Demanda Baja (DB) y Desistir (D). La cadena resultante se puede ver en la figura 7:

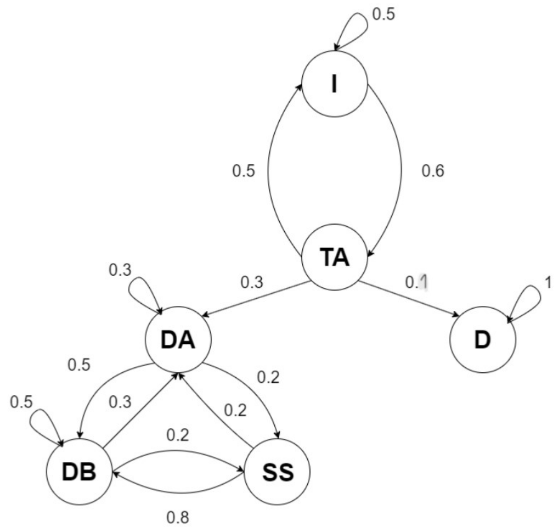

Figura 6: Cadena de Markov.

Analizando la cadena de Markov podemos notar que hay clases recurrentes, transientes y absorbentes. Las clases recurrentes son DA, DB y SS, las clases transientes son I y TA, y la clase absorbente es D.

Luego se tiene la matriz de transición P, la que se puede ver en la siguiente tabla:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & \text{I} & \text{TA} & \text{D} & \text{DA} & \text{DB} & \text{SS} \\ \hline \text{I} & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{TA} & 0.6 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 \\ \text{D} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{DA} & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ \text{DB} & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ \text{SS} & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \end{array}$$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante realice su emprendimieto una vez que tuvo la idea?

Solución:

Para esta pregunta es importante ver que la clase recurrente conformada por DA, DB y SS se puede escribir como una clase absorbente, la que vamos a nombrar E, por emprendimiento. La cadena de Markov resultante al hacer este cambio se puede ver en la figura 8:

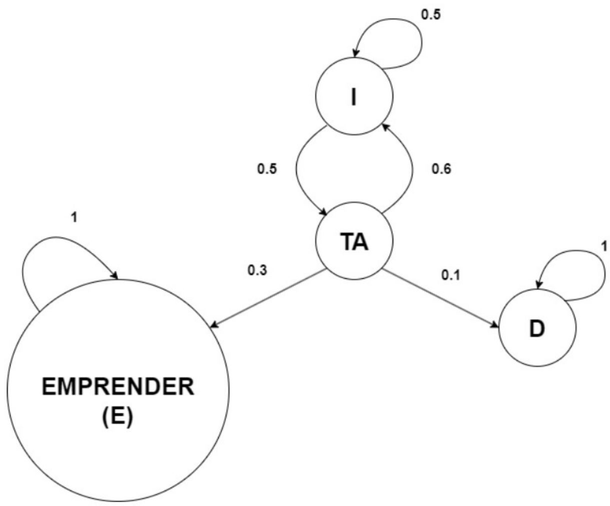

Figura 7: Cadena de Markov con clase E.

Cuando nos pregunta cual es la probabilidad de pasar de un estado a otro nos están pidiendo $f_{estado1->estado2}$, en este caso f_{IE}. Para hacer este calculo vemos a que estados puedo llegar desde el estado en el que estoy y la probabilidad de llegar a esos estados, por ejemplo, desde I puedo ir a I o a TA, resultando en:

$$f_{IE} = 0.5f_{IE} + 0.5f_{TAE} \tag{1}$$

Es importante ver que en esta cadena desde I solo puedo ir a TA (O bien mantenerme en I y en algún momento llegar a TA), por lo que voy a pasar por TA y, por lo tanto mi probabilidad de pasar de I a E va a ser la misma que de pasar de TA a E, de hecho, haciendo el despeje de la ecuación anterior se tiene:

$$f_{IE} = f_{TAE} \tag{2}$$

Luego seguimos desarrollando el problema:

$$f_{TAE} = 0.6f_{IE} + 0.3f_{EE} + 0.1f_{DE} \tag{3}$$

Además tenemos que por definición $f_{EE} = 1$, ya que si estoy en E no puedo salir de ahí, mientras que $f_{DE} = 0$, ya que si estoy en D no puedo pasar a E, ya que es un estado absorbente, resultando lo siguiente:

$$f_{TAE} = 0.6f_{IE} + 0.3 \tag{4}$$

Luego reemplazando (4) en (1) obtenemos:

$$f_{IE} = 0.8f_{IE} + 0.15 \tag{5}$$

$$f_{IE} = 0.75 \tag{6}$$

Entonces se tiene que la probabilidad de pasar de I hasta E es de 0.75, y como tenemos 2 clases absorbentes la probabilidad de pasar de I hasta D es 0.25, es decir, 1 menos f_{IE}.

Los siguientes ejercicios son para generar intuición respecto a como podrían variar los ejercicios al cambiar los valores y que cosas afectan al valor de $f_{A->B}$

(propuesto 1) Repentinamente todas las ideas del estudiante son buenas, por lo que decide de ahora en adelante tomar acción siempre que llegue una idea (con una probabilidad de 1 pasa a tomar acción si es que está ideando) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante realice su emprendimieto una vez que tuvo la idea?

(propuesto 2) Le dijeron al estudiante que no podía ser su propio jefe, lo que lo desmotivó, por lo que ahora su probabilidad de desistir es de 0.2 una vez tomada la acción y su probabilidad de emprender es de 0.2 ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante realice su emprendimieto una vez que tuvo la idea?

(propuesto 3) ¡¡El estudiante se ganó el kino!!, su motivo para tener este emprendimiento era principalmente económico, por lo que decidió que le va a dedicar menos esfuerzos a esta idea, entonces su probabilidad de pasar de tomar acción a volver a idear es de 0,2, su probabilidad de desistir dado que tomó acción es de 0,6 y su probabilidad de emprender dado que tomó acción es de 0,2 ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante realice su emprendimieto una vez que tuvo la idea?

(c) Una vez que haya emprendido, en el largo plazo ¿Cuánto sera la ganancia semanal esperada?

Solución:
Es importante notar para esta pregunta que no es la misma ganancia semanal esperada si es que me encuentro en la etapa de Ideas o si ya me encuentro en la etapa de Emprendimiento, en este caso se pide la segunda. Entonces, estamos en una clase recurrente, irreducible y ergódica, por lo que se cumplen los criterios de probabilidades estacionarias y podemos calcular los valores del vector π. Para facilitar los cálculos se tiene la clase recurrente en la figura 9.

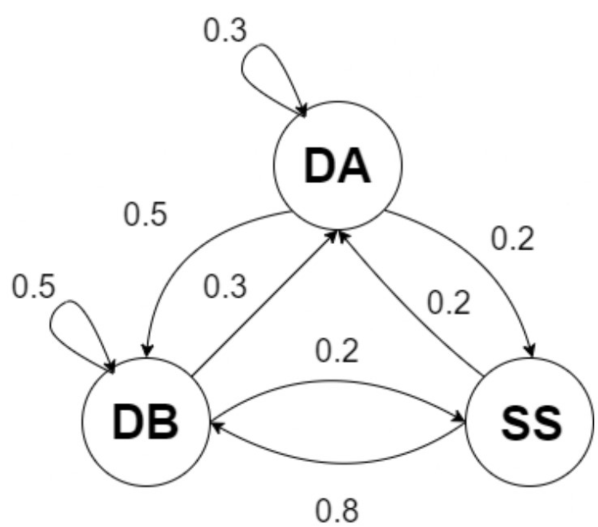

Figura 8: Clase recurrente

Una forma más simple de ver el sistema de ecuaciones que vamos a plantear es que se toma π_i como todos los π_j que llegan a π_i multiplicado por la probabilidad de que lleguen a π_i.

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\pi_{DA} &= 0.3\pi_{DA} + 0.3\pi_{DB} + 0.2\pi_{SS} && \text{(i)}\\
\pi_{DB} &= 0.5\pi_{DA} + 0.5\pi_{DB} + 0.8\pi_{SS} && \text{(ii)}\\
\pi_{SS} &= 0.2\pi_{DA} + 0.2\pi_{DB} && \text{(iii)}\\
\pi_{DA} + \pi_{DB} + \pi_{SS} &= 1 && \text{(iv)}
\end{aligned}$$

Si reemplazamos (iii) en (iv):

$$\begin{aligned}
1.2(\pi_{DA} + \pi_{DB}) &= 1\\
\pi_{DA} + \pi_{DB} &= \frac{1}{1.2}\\
\pi_{DA} + \pi_{DB} &= \frac{5}{6} && \text{(v)}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\pi_{SS} = \frac{1}{6} \tag{vi}$$

Reemplazamdp (v) y (vi) en (i):

$$\pi_{DA} = 0.3\frac{5}{6} + 0.2\frac{1}{6}$$
$$\pi_{DA} = \frac{1.7}{6} \tag{vii}$$

De lo cual se puede inferir (reemplazando (vi) y (vii) en (iv)) que:

$$\pi_{DB} = \frac{3.3}{6} \tag{viii}$$

Para poder calcular la ganancia esperada se deben multiplicar las ganancias o pérdidas de cada estado por la probabilidad estacionaria que ocurra, es decir:

$$E[X] = \frac{1.7}{6} \cdot 500000 + \frac{3.3}{6} \cdot 300000 - \frac{1}{6} \cdot 200000$$

Lo que da una ganancia semanal esperada de 273,333 CLP.