Auxiliar Extra C1

PDD

Profesores: Susana Mondschein y Denis Sauré
Auxiliares: Ignacio Alarcón, Ailyn Carter, Antonia Díaz, Alfonso Ferrada, Felipe Fierro, Diego Kauer, Pedro Maldonado, Diego Moreno, Iván Vidal

Pregunta 1 (Inventario)

Una fábrica de motocicletas, recientemente ha recibido un pedido de uno de sus nuevos modelos, los cuales deben ser fabricados de manera paralela a la línea de producción en lotes de 10 unidades, razón por la cual se solicita que su persona planifique la producción teniendo en cuenta la siguiente información:

Tabla 1: Información para la planificación de producción

PERIODO	Demanda	Producción Máxima	Costo unitario de Producción
ENERO	0	20	210
FEBRERO	20	40	230
MARZO	40	50	200
ABRIL	30	20	240

Además se sabe que el costo unitario de almacenamiento es de 10.

a) Modele este problema como un PDD.

Sea d_k la producción del periodo k, D_k la demanda del periodo k, C_a el costo unitario de almacenaje y CP_k el costo unitario de producción en la etapa k.

- Etapas, $t = \{1, 2, 3, 4\}$
- Variable de estado, sea S_k la cantidad de motocicletas con las que llego al mes k.
- Variable de decisión, Sea d_k la cantidad de motocicletas que se producen en el mes k.
- Recurrencia de estado, $S_{k+1} = S_k + d_k - D_k$
- Restricciones,
  - Producción máxima mensual,
    $d_k \leq ProducciónMáxima_t$
  - Cumplir con la demanda,
    $S_k + d_k \geq D_k$

- Naturaleza de las variables,
  $S_k \geq 0$
  $d_k \geq 0$

- Función de Utilidad,

$$V_k^* = Min\{CP_k \cdot d_k + C_a \cdot S_k + V_{k+1}(S_{k+1})\}$$

- Caso borde,
  $S_1 = 0$
  $V_5 = 0$

b) Resuelva el problema modelado.

En esta y las siguientes tablas se tiene aquellos valores que aparecen como (-) en la parte superior izquierda se deben a que son casos en que no se cumplen las restricciones planteadas, específicamente la de cumplir con la demanda. Luego, aquellos valores que aparecen como (-) en la parte inferior derecha son aquellos casos en que se produce más que la demanda restante.

Por ejemplo, antes de construir la tabla para el periodo de abril hay que tener en cuenta que al tener costos de producción similares, sumado a costos de almacenaje no vale la pena agregar los casos en que se llega a la última etapa con 40 o 50 unidades, ya que se sobrepasa la demanda restante.

Tabla 2: Valores para n=4, es decir, Abril

S_k/d_k	**0**	**10**	**20**	V_4^*	d_4^*
10	-	-	4900	4900	20
20	-	2600	-	2600	10
30	300	-	-	300	0

Tabla 3: Valores para n=3, es decir, Marzo

S_k/d_k	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	V_3^*	d_3^*
0	-	-	-	-	14900	14900	50
10	-	-	-	13000	12700	12700	50
20	-	-	11100	10800	10500	10500	50
30	-	9200	8900	8600	-	8600	40
40	7300	7000	6700	-	-	6700	30

Tabla 4: Valores para n=2, es decir, Febrero

S_k/d_k	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	V_2^*	d_2^*
0	-	-	19500	19600	19700	19500	20
10	-	17300	17400	17500	17900	17300	10
20	15100	15200	15300	15700	16100	15100	0

Tabla 5: Valores para n=1, es decir, Enero

S_k/d_k	**0**	**10**	**20**	V_1^*	d_1^*
0	19500	19400	19300	19300	20

En definitiva se tiene que en Enero se tiene que producir 20 unidades, en Febrero 0 unidades, en Marzo 50 unidades y en Abril 20 unidades.

c) (Propuesto) ¿Qué ocurre si no puede almacenar más de 10 motocicletas?

d) (Propuesto) ¿Que ocurre si le suben los costos de arriendo a 80[$]?

e) (Propuesto) La empresa que almacena las motocicletas ha cambiado el contrato, ahora ud dispone de dos bodegas con distintos costos, C_{a1} de 10[$] para la primera bodega de 10 cupos y de C_{a2} de 40[$] para la segunda bodega con cupos ilimitados, ¿cómo cambia el modelamiento del problema?

Pregunta 2 (Shortest path)

Dado el grafo mostrado en la Figura 1, donde todos los caminos son unidireccionales hacia la derecha, el objetivo es que una persona parta desde el nodo A y llegue al nodo J. Cada arista del grafo tiene un valor asociado que representa la distancia o el costo del trayecto entre dos nodos adyacentes. El reto consiste en encontrar el camino más corto o eficiente desde A hasta J, teniendo en cuenta los valores asignados a cada trayecto.

Para resolver el problema, se deben considerar las siguientes condiciones:

- Todos los caminos son unidireccionales, avanzando siempre hacia la derecha, es decir, desde un nodo más a la izquierda hacia uno más a la derecha.
- El viajero debe moverse desde el nodo A hasta el nodo J, pasando por nodos intermedios según sea necesario.

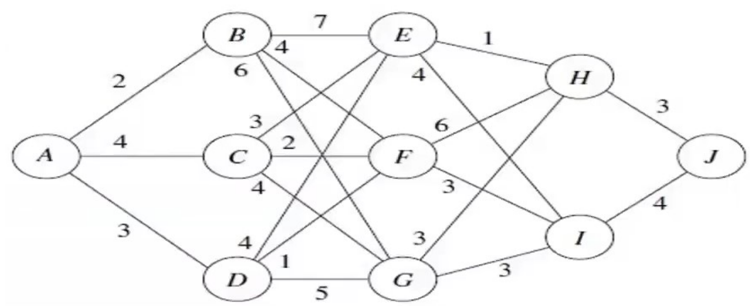

Figura 1: Mapa de nodos y arcos unidireccionales

a) Modele este problema como un PDD.

- Etapas, $t = \{1, 2, 3, 4\}$
- Variable de estado, sea S_k la distancia recorrida en llegar al nodo k.
- Variable de decisión, Sea d_k la distancia hasta el nodo k al que me dirijo.
- Recurrencia de estado, $S_{k+1} = S_k + d_k$
- Función de Utilidad,

$$V_k^* = Min\{d_k(S_k) + V_{k+1}^*(S_{k+1})\}$$

- Casos borde,
  $S_1 = 0$
  $V_5 = 0$

b) Resuelva el problema modelado.

Tabla 6: Etapa 4

S_k/d_k	J	V_4^*	d_4^*
H	3	3	J
I	4	4	J

Tabla 7: Etapa 3

S_k/d_k	H	I	V_3^*	d_3^*
E	4	8	4	H
F	9	7	7	I
G	6	7	6	H

Tabla 8: Etapa 2

S_k/d_k	E	F	G	V_2^*	d_2^*
B	11	11	12	11	E,F
C	7	9	10	7	E
D	8	8	11	8	E,F

Tabla 9: Tabla minimalista sin sumas

S_k/d_k	B	C	D	V_4^*	d_4^*
A	13	11	11	11	C,D

Este problema tiene 3 soluciones con un costo total de 11, las que se pueden ver a continuación:

$$A \to C \to E \to H \to J$$

$$A \to D \to E \to H \to J$$

$$A \to D \to F \to I \to J$$

Pregunta Propuesta (Arboles de Decisión)

Un grupo de investigadores está estudiando el comportamiento de los estudiantes del departamento de industrias ante recompensas. Para ello han diseñado el laberinto que se muestra en la figura. Dentro de las reglas de este experimento está nunca retroceder, y cada vez que se encuentra frente a una intersección puede doblar a la derecha o a la izquierda.

En el laberinto hay sólo 5 intersecciones: A, B, C, D y E. Si en su recorrido el estudiante se encuentra con un callejón sin salida pierde.

Después de numerosos ensayos los investigadores han determinado lo siguiente:

- La probabilidad de que el estudiante salga del laberinto es 0.6.
- El 80 % de las veces el estudiante escogió doblar a la derecha en su segunda intersección. (Esto no significa que la probabilidad de doblar a la derecha en B es igual a la probabilidad de doblar a la derecha en D y ambas valen 0.8).
- De encontrarse en las intersecciones de C o E, el estudiante repetirá su conducta de la intersección anterior (B o D) con probabilidad 0.7.
- El 40 % de las veces el estudiante escogió doblar a la izquierda en la intersección A.
- Uno de los investigadores del grupo asegura tener una teoría que explica el comportamiento del estudiante. Tan seguro está de sus descubrimientos que está dispuesto a apostar una entrada a la FonDIIta a que el estudiante no logra salir del laberinto.

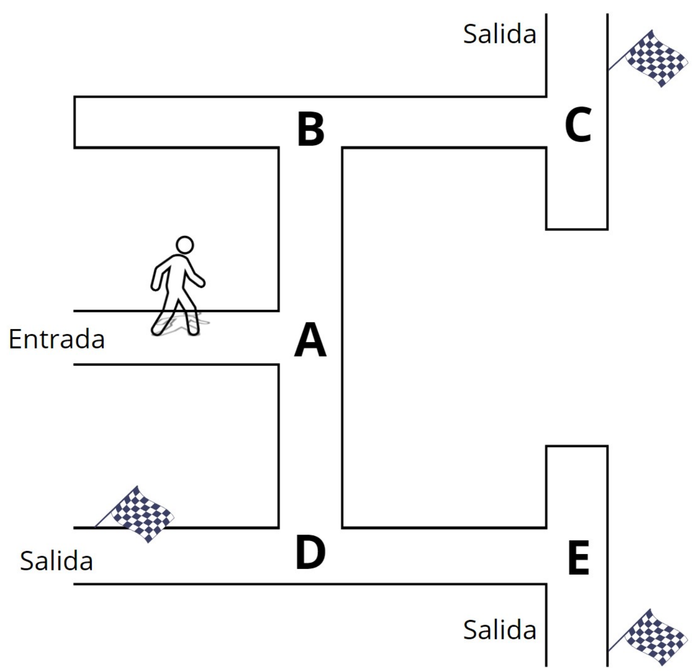

Figura 2: Laberinto

Responda las siguientes preguntas utilizando el criterio de maximizar el valor esperado:

a) Si usted ha estado presente en el experimento y cuenta con la misma información que todos los científicos, ¿Acepta o no la apuesta? (si usted pierde deberá cancelar C [\$], es decir, el precio al que valora la entrada a este evento tan esperado).

R: Si acepto la apuesta recibiré C [\$] y si pierdo tendré que pagar la misma cantidad. Por otro lado, si no acepto la apuesta no ganaré ni perderé dinero. No es necesario hacer un árbol de decisión para ver que sí acepto la apuesta. La utilidad esperada será:

$$\begin{aligned}
E[\text{Utilidad}] &= C\,[\$] \cdot P[\text{Ganar}] - C\,[\$] \cdot P[\text{Perder}] \\
&= C\,[\$] \cdot (P[\text{Estudiante Sale}] - P[\text{Estudiante no Sale}]) \\
&= C\,[\$] \cdot (0.6 - 0.4) \\
&= 0.2 \cdot C\,[\$]
\end{aligned}$$

b) Construya un árbol de decisión que le permita decidir cuánto estaría dispuesto a pagar por retrasar la decisión de apostar después de conocer el comportamiento del estudiante en A. Determine explícitamente el valor de esta opción teniendo en cuenta que el estudiante valora esta entrada en \$10.000.

R: Podemos pagar una cantidad Y para ver que camino toma el estudiante en la primera bifurcación, y con esta información decidir si apostamos o no.

Sea XI que en el nodo X el estudiante dobla a la izquierda y XD que en el nodo X el estudiante dobla a la derecha, para X perteneciente al conjunto $\{A, B, C, D, E\}$.

En función de esta notación tenemos las siguientes informaciones por enunciado:

$$\begin{aligned}
P[AD|A] &= 0.6 = 1 - P[AI|A] \\
0.8 &= P[BD|B] \cdot P[B] + P[DD|D] \cdot P[D] \\
&= P[BD|B] \cdot 0.4 + P[DD|D] \cdot 0.6 \\
P[CI|C] &= 0.3 = 1 - P[CD|C] \\
P[ED|E] &= 0.3 = 1 - P[EI|E] \\
P[A] &= 1 \\
P[B] &= P[AI|A] \\
&= 0.4 = 1 - P[D] \\
P[C] &= P[BD|B] \cdot P[B] \\
&= P[BD|B] \cdot 0.4 \\
P[E] &= P[DI|D] \cdot P[D] \\
&= P[DI|D] \cdot 0.6
\end{aligned}$$

También conocemos la probabilidad de que el estudiante salga del laberinto:

$$\begin{aligned}
0.6 &= P[CI|C] \cdot P[C] + P[DD|D] \cdot P[D] + P[ED|E] \cdot P[E] \\
0.6 &= 0.3 \cdot P[BD|B] \cdot 0.4 + 0.6 \cdot P[DD|D] + 0.3 \cdot 0.6 \cdot (1 - P[DD|D])
\end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos,

$$P[BD|B] = 0.875$$
$$P[DD|D] = 0.750$$

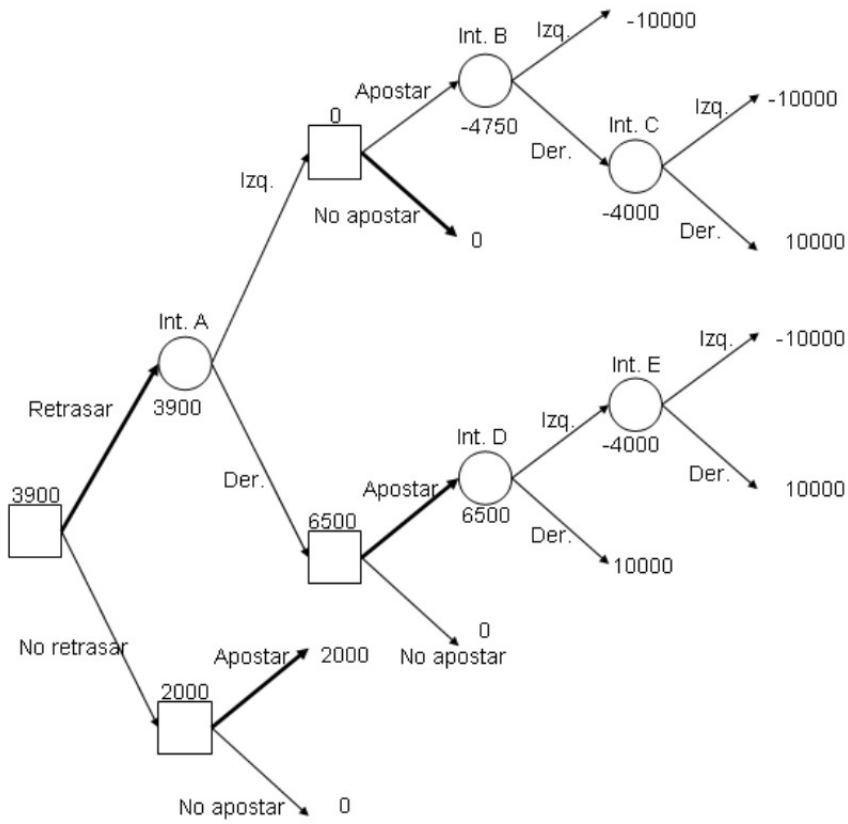

Figura 3: Árbol de decisión

c) Una Maga famosa, Jolandi Sultani, está dispuesta a cobrarle X [$] por decirle exactamente cuál será el comportamiento del estudiante en la segunda intersección, es decir, si elegirá la derecha o la izquierda. ¿Cuánto es lo máximo que estaría dispuesto a pagar por esta información?

La maga nos entrega información perfecta, es decir, si nos dice que el estudiante va a doblar a la derecha (MD) la probabilidad de que lo haga es de 1, de igual manera para cuando la maga dice que el estudiante va a doblar a la izquierda (MI).

Para desarrollar esta parte necesitamos calcular la siguiente probabilidad:

$$0.8 = P[\text{Derecha segunda intersección}]$$
$$= P[\text{Derecha segunda intersección}|MD] \cdot P[MD] + P[\text{Derecha segunda intersección}|MI] \cdot P[MI]$$
$$= 1 \cdot P[MD] + 0 \cdot (1 - P[MD])$$

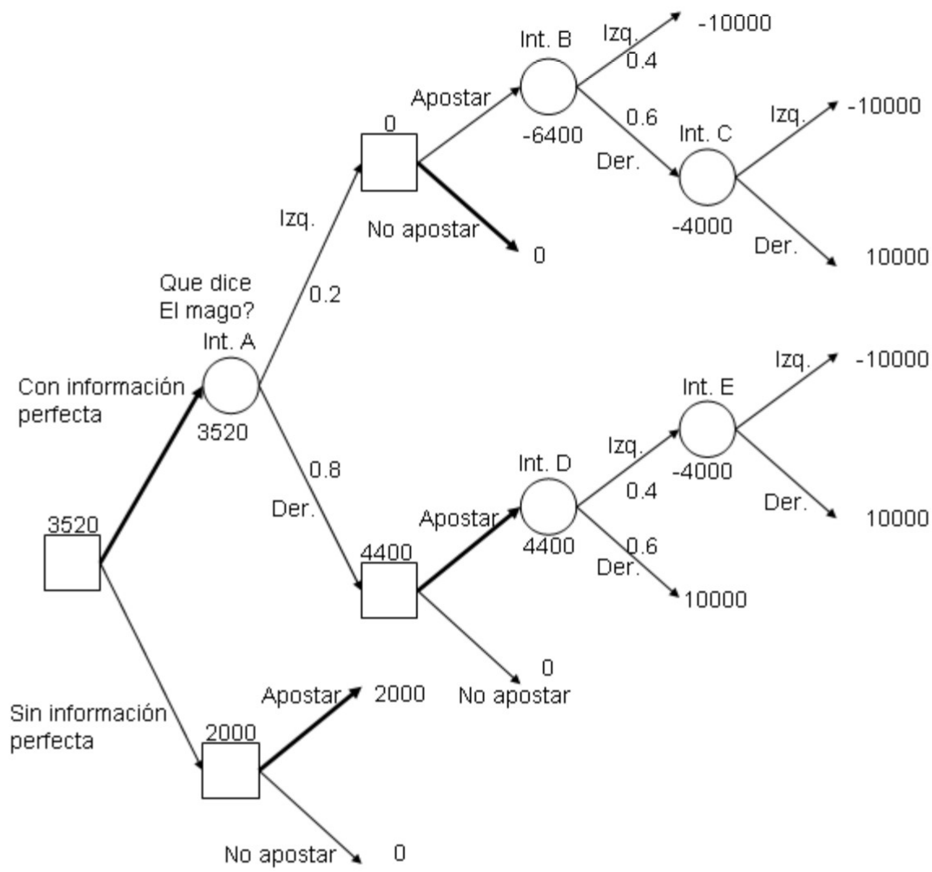

Figura 4: Árbol con óraculo (MALO :c)

Se tiene que esta dispuesto a pagar 1520[$].