IN3701 - Modelamiento y Optimización

CONTROL

Profesor: Fernando Ordóñez
Auxiliares: Jose Miguel Gonzalez, Matías Muñoz

P1. Modelación

Suponga que trabaja en la administración de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile y le solicitan planificar las fechas de los exámenes presenciales de los cursos del Plan Común. Dado un conjunto E de estudiantes y un conjunto C de cursos, los cuales cuentan con un único examen. Para cada estudiante $e \in E$ hay un conjunto $C_e \subseteq C$ que define los cursos que el estudiante e toma este semestre. Hay un conjunto D que contiene las fechas hábiles para agendar un examen. Por razones sanitarias, es necesario que la cantidad total de alumnos rindiendo examen en la facultad no supere un aforo de Q personas (la distribución de salas es resulto *ex post*). También, es necesario que ningún alumno tenga dos exámenes el mismo día.

1. (2 puntos) Formule un problema de optimización lineal entero para modelar el problema de decidir las fechas de los exámenes para cada curso. Es decir, para cada curso $c \in C$ hay que seleccionar un conjunto $D_c \subseteq D$ con $|D_c| = 1$, por lo tanto, es una única fecha. Para comenzar no se tendrá ninguna función objetivo.

2. (2 puntos) Considere ahora que la planificación incluye los exámenes recuperativos de cada ramo. Suponga que existen cursos que sólo tienen examen y cursos que tienen examen y examen recuperativo. Es decir, la cantidad de exámenes por curso está representado por un valor $t_c \in \{1, 2\}$ ($t_c = 1$ significa que el curso no cuenta con examen recuperativo). En este escenario el conjunto $D_c \subseteq D$ a seleccionar debe ser tal que $|D_c| = t_c$. Modifique su modelo de manera de que para cada curso hay al menos 5 días hábiles entre el exámen y el exámen recuperativo.

3. (2 puntos) Cambie su modelo y su programa tal que se maximize el número de estudiantes que tienen a lo más un examen cada semana. Además, si un estudiante tiene dos o más exámenes en una semana es necesario que tengan una separación mínima de 2 días.

Pauta

1.

Conjuntos y Parámetros

- Q Aforo facultad.
- D Fechas hábiles.
- E Estudiantes.
- C Cursos.
  - C_e Cursos inscritos por estudiante $e \in E$
  - D_c Fechas de examen del curso $c \in C$.
  - t_c Número de evaluaciones del curso $c \in C$.

Variables de Decisión

$$x_{c,d} = \begin{cases} 1, & \text{si curso } c \text{ tiene evaluación en el fecha } d \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Restricciones

- **Número de evaluaciones**
  Cada curso debe tener asignado su examen.

$$\sum_{d \in D} x_{c,d} = 1 \qquad \forall c \in C$$

- **Condición Sanitaria**
  El número de alumnos dando examen no puede exceder el aforo de la facultad.

$$\sum_{c \in C} x_{c,d} \cdot \left(\sum_{e: c \in C_e} 1 \right) \leq Q \qquad \forall d \in D \quad \forall e \in E$$

- **Único examen al día**
  Los alumnos no pueden tener más de un examen programados en un mismo día.

$$\sum_{c \in C_e} x_{c,d} \leq 1 \qquad \forall d \in D \quad \forall e \in E$$

- **Naturaleza de variables**

$$x_{c,d} \in \{0, 1\} \qquad \forall c \in C \quad \forall d \in D$$

Función Objetivo

$$\min \quad 0$$

2. Para esta parte, se modifica una de las restricciones anteriores y se añade una nueva.

   Restricciones

   - **Número de evaluaciones***
     Cada curso debe tener asignado sus exámenes.
     $$\sum_{d \in D} x_{c,d} = t_c \qquad \forall c \in C$$
   - **Días entre exámenes**
     Entre exámenes de un curso, debe haber una separación de 5 días hábiles.
     $$\sum_{i=d}^{d+4} x_{c,i} \leq 1 \qquad \forall c \in C \quad \forall d \in \{1, \ldots, |D| - 4\}$$

3. Dado que en el enunciado no se especifica una estructura definida para las semanas, es que se define un conjunto S donde cada elemento $s \in S$ representa una partición disjunta de los días hábiles tal que entre todas se contienen los elementos de D.

   En forma complementaria, este problema puede ser abordado desde una perspectiva menos genérica considerando que D parte desde un día lunes y que las semanas tienen una extensión fija de 5 o 6 días hábiles. En todos estos escenarios, el modelamiento es análogo.

   Conjuntos y Parámetros

   - S Semanas.

   Variables de Decisión

   $$z_{e,s} = \begin{cases} 1, & \text{si estudiante } e \text{ tiene 2 o más exámenes en la semana } s. \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$
   $$w_e = \begin{cases} 1, & \text{si estudiante } e \text{ tiene 2 o más exámenes en alguna semana } s. \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

   Restricciones

   - **Exámenes en misma semana**
     Durante la semana, los exámenes de un estudiante están separados por al menos 2 días.
     $$\sum_{i=j}^{j+1} \sum_{c \in C_e} x_{c,i} \leq 1 \qquad \forall e \in E \quad \forall s \in S \quad \forall j \in s \backslash \{s_{|s|}\}$$

- **Relación entre variables** $x \wedge z$
  Si estudiante tiene 2 o más exámenes en la semana, entonces z vale 1.

$$\sum_{d:d\in s} \sum_{c\in C_e} x_{c,d} \leq 1 + z_{e,s} \cdot M \qquad \forall e \in E \quad \forall s \in S \quad M > 0$$

- **Relación entre variables** $z \wedge w$
  Si estudiante tiene 2 o más exámenes en alguna semana, entonces w vale 1.

$$\sum_{s\in S} z_{e,s} \leq w_s \cdot M \qquad \forall e \in E \quad M > 0$$

- **Naturaleza de variables**

$$z_{e,s} \in \{0,1\} \qquad \forall e \in E \quad \forall s \in S$$
$$w_e \in \{0,1\} \qquad \forall e \in E$$

Función Objetivo

$$\min \quad \sum_{e\in E} w_e$$

P2. Geometría

1. (1.5 puntos) Sea P un poliedro acotado en $\mathbb{R}^n$, sea a un vector en $\mathbb{R}^n$ y sea b algún escalar. Definiendo:

$$Q = \{x \in P | a'x = b\}$$

   Muestre que cada punto extremo de Q es un punto de extremo de P, o es una combinación convexa de dos puntos extremos adyacentes de P.

2. (1.5 puntos) Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq K, i \in \{1, \ldots, n\}\ \}$ con K un parámetro positivo. Argumente si los conjuntos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ son convexos. En caso que encuentre formas geométricas estándar (por ejemplo triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.), no debe demostrar que son convexas.

3. (3 puntos) Considere el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \geq b \end{array} \qquad (PL)$$

   y el poliedro correspondiente $P = \{x \mid Ax \geq b\}$. Responda Verdadero o Falso. Si su respuesta es Verdadero provea una prueba. En caso contrario, provea un contraejemplo.

   (a) Si el PL es no-acotado implica que P es no-acotado.

   (b) Si P es no-acotado implica que el PL es no-acotado.

   (c) Si P tiene una solución básica factible implica que el PL tiene solución óptima.

   (d) Si el PL tiene dos soluciones óptimas distintas implica que hay una tercera solución óptima.

Pauta

1. Sea x punto extremo de Q. Como x es punto extremo, también es solución básica factible, y por lo tanto, existen n restricciones de las que caracterizan a $Q = \{x \in P | \mathbf{a}'x = \mathbf{b}\}$ que son activas y linealmente independientes. Como x debe satisfacer $\mathbf{a}'x = \mathbf{b}$ de forma activa, se sabe que hay al menos $n-1$ restricciones activas y linealmente independientes que pertenecen al conjunto de restricciones que definen a P. Hay dos posibles casos:

   - Si x satisface n restricciones activas y linealmente independientes en P además de $\mathbf{a}'x = \mathbf{b}$ en este caso, así x es solución básica factible de P, y por lo tanto, punto extremo.
   - Si no, entonces x satisface $n-1$ restricciones activas y linealmente independientes en P. Dos puntos extremos son adyacentes si satisfacen las mismas $n-1$ restricciones. Un punto que satisfaga $n-1$ restricciones de P y la restricción $\mathbf{a}'x = \mathbf{b}$ yace en una línea entre 2 puntos extremos adyacentes. Por lo tanto, puede escribirse como combinación convexa de estos puntos.

2. Antes de comenzar, es bueno evaluar que A corresponde a una hiperesfera mientras que B es un hipercubo, ambas generalizaciones de n dimensiones de las figuras usuales. A continuación, se evalúa la convexidad de los casos propuestos:

   - A, B
     Puesto que ambas son generalizaciones de figuras convexas, se tiene que también son convexas.

   - $A \cap B$
     Este caso es convexo puesto que A, B son convexos, y que la intersección de convexos es convexa.

   - $A \cup B$
     Por lo general, las uniones de conjuntos no necesariamente son convexas, aún cuando estas mismas lo son. En este caso en particular, el factor que determina esta condición es el parámetro K.

     - $K \in [0, 1/\sqrt{2}]$
       En este escenario B se 'encuentra dentro' de A, es decir, $B \subseteq A$ por lo que $A \cup B = A$ y en consecuencia es convexo.

     - $K \in [1/\sqrt{2}, 1)$
       Para este intervalo las 'puntas' de B 'sobresalen' A, pero no es un tamaño suficiente como para cubrirle completamente. En vista de esto, $A \cup B$ no es convexo.

     - $K = 1$
       Para este valor de K el radio de A coincide con el arista de B, por lo que su unión forma una figura convexa con forma de 'gota'.

     - $K \in (1, \infty)$
       Habiendo excedido el radio de A, es que la B 'sobresale' A, por lo que forman una unión no convexa.

3.

(a) **Verdadero**

Para que un PL sea no acotado es que necesario que exista un número infinito de puntos factibles tales que la función objetivo decrece. Para que esto sea posibles es necesario que estos infinitos puntos pertenezcan al poliedro P, es decir, la región factible debe ser no acotado.

(b) **Falso**

Considerando que PL sea un problema de minimización sobre un cono propio, por ejemplo:

$$\begin{array}{lrcrl} \min & 0 & & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq 0 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

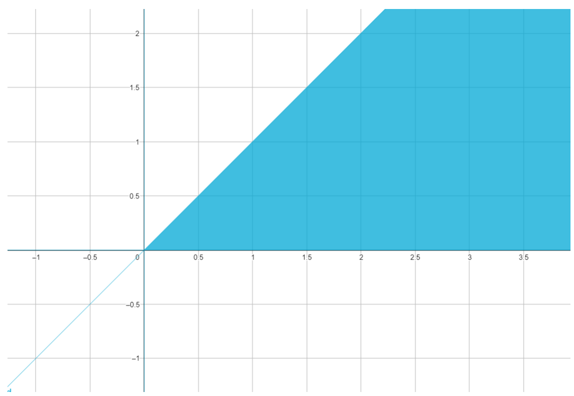

Fig. 1: Región factible.

Se tiene que todo punto dentro de la región factible P no acotada entrega la misma solución óptima finita para PL, es decir es acotado.

(c) **Falso**

Considerando el mismo problema anterior, pero con una función objetivo $min - x_1 - x_2$ se tiene que a pesar que el cono posea una esquina, el problema no posee una solución óptima.

(d) **Verdadero**

Esta situación puede ser vista como la caso conocido en que las curvas de nivel de la función objetivo son 'paralelas' a una de las aristas del poliedro, en el que la combinación convexa entre las esquinas óptimas también será óptima.

P3. SBF y Flujo en Redes

Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{lrrrrrcr}
\min & x_{12} & +2x_{13} & +3x_{23} & +x_{24} & +2x_{34} & & \\
\text{s.a.} & x_{12} & +x_{13} & & & & = & 2 \\
 & -x_{12} & & +x_{23} & +x_{24} & & = & 1 \\
 & & -x_{13} & -x_{23} & & +x_{34} & = & -1 \\
 & x_{12}, & x_{13}, & x_{23}, & x_{24}, & x_{34} & \geq & 0
\end{array}
\qquad (FR)
$$

1. (1 punto) Dadas las dimensiones del problema (FR), ¿Cuál es el número máximo posible de soluciones básicas factibles?

2. Encuentre y justifique lo siguiente:

   (a) (1 punto) Una solución básica que no es factible.

   (b) (1.5 puntos) Dos soluciones básicas factibles distintas que sean adjacentes.

3. Interpretación como problema de flujo en redes. Considere ahora que las variables del problema (FR), x_{ij} representan el flujo que va desde el nodo i al nodo j.

   (a) (1.5 puntos) Dibuje la red descrita por el problema (FR). Indique los nodos, arcos, costos y capacidades, y las cantidades de flujo que se agregan y retiran de la red.

   (b) (1 punto) Si $\hat{x}$ y $\tilde{x}$ son las dos SBF adjacentes encontradas en P3.2.b, ¿Cuál es el vector que se debe sumar a $\hat{x}$ para llegar a $\tilde{x}$? ¿Qué representa este vector en el flujo en red que representa (FR)?.

Pauta

1. Respuesta: Para construir una S.B.F, se necesitan 5 restricciones L.I activas, de las cuales se cuenta ya con 3. Es por esto que se necesita tener 2 restricciones $x_i \geq 0$ activas.

   De estas 2 opciones, se tienen 5 candidatos para llenar dichos espacios, por lo tanto el problema es 2C5 lo que es equivalente a $5!/2!3!$ lo que es igual a 10 posibles soluciones.

   Si alguien decidió buscarlas, los casos son los siguientes:

   - $x_{12}, x_{13} = 0 \rightarrow\leftarrow$.
   - $x_{12}, x_{23} = 0 \Rightarrow x_{13} = 2, x_{34} = 1, x_{24} = 1$.
   - $x_{12}, x_{24} = 0 \Rightarrow x_{13} = 2, x_{34} = 2, x_{23} = 1$.
   - $x_{12}, x_{34} = 0 \Rightarrow x_{13} = 2, x_{23} = -1, x_{24} = 2$ infactible.
   - $x_{13}, x_{23} = 0 \Rightarrow x_{12} = 2, x_{34} = -1, x_{24} = 3$ infactible.
   - $x_{13}, x_{24} = 0 \Rightarrow x_{12} = 2, x_{34} = 2, x_{23} = 3$.
   - $x_{13}, x_{34} = 0 \Rightarrow x_{12} = 2, x_{23} = 1, x_{24} = 2$.
   - $x_{23}, x_{24} = 0 \Rightarrow x_{12} = -1, x_{13} = 3, x_{34} = 2$ infactible.
   - $x_{23}, x_{34} = 0 \Rightarrow x_{13} = 1, x_{12} = 1, x_{24} = 2$.
   - $x_{24}, x_{34} = 0 \Rightarrow$ infactible.

2. (a) De los casos anteriormente mencionados, se puede elegir cualquiera con un $x_{ij} \leq 0$ para indicar que dicha solución es infactible.

   (b) 2 Soluciones básicas factibles son adyacentes si es que todas menos 1 de sus variables en la base son las mismas, lo que también implica que todas menos 1 de las variables que constituyen la no base son las mismas (aunque con valores numéricos distintos). Cualquiera de las soluciones indicadas en la pregunta anterior que tengan estas características sirve como solución.

3. (a) Los nodos son representados con pelotitas con su número correspondiente, los arcos son las flechas que van de un nodo a otro, donde el nodo de donde parte es el primer sub índice de la variable correspondiente, y el nodo que toca su cabeza es el último sub indice de dicha variable.

   Los costos surgen del vector de costos de la función objetivo, que corresponden a cuanto sale moverse por el arco indicado por los sub índices de la S.B.F.

   Los flujos ofertados o demandados surgen del valor de la igualdad, es decir, lo que está a la derecha de la restricción de conservación de flujo.

   No hay capacidades superiores, pues es el problema de flujo a costo mínimo, pero si hay cotas inferiores de capacidad, las que corresponden a 0.

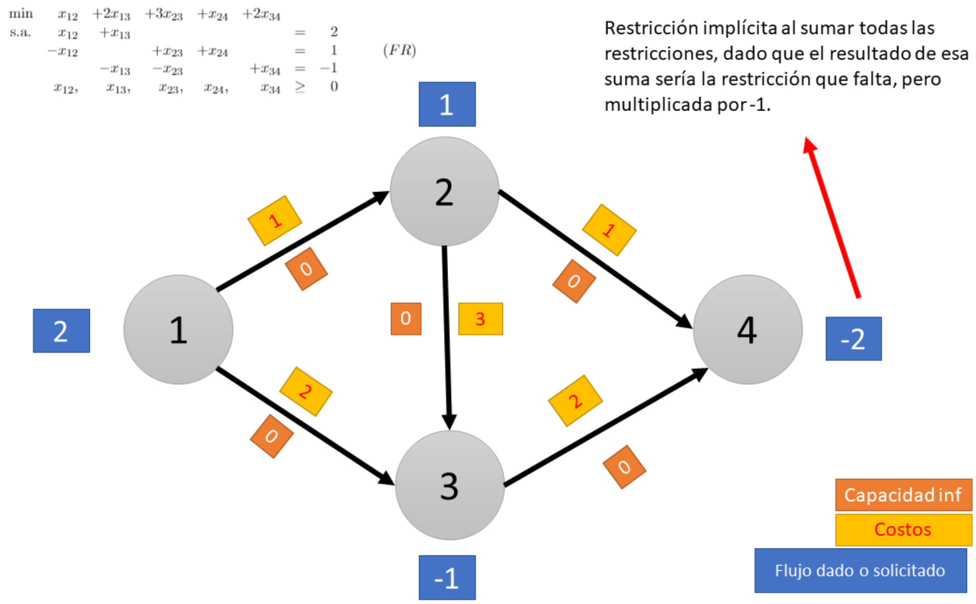

Fig. 2: Diibujo

(b) El vector se obtiene expresando ambas soluciones básicas factibles, y restándolas. Dado este, este vector representa el "apagar" un arco, es decir, que se deje de enviar flujo por esa dirección para que este flujo sea enviado por otro camino, y las concecuencias que esto implica.