IN3701 - Modelamiento y Optimización

CONTROL 2

Profesor: Fernando Ordóñez
Auxiliares: Jose Miguel Gonzalez, Matías Muñoz

Instrucciones

El Control 2 consta de 3 preguntas. Cada una de las 3 preguntas puede recibir una evaluación entre 1.0 y 7.0.

La resolución, redacción de las respuestas y entrega del Control es individual.

- El Tiempo estimado de lectura y resolución del Control es de 3 horas
- El plazo final para subir el (los) archivo(s) será las 23:59 h del día miércoles 16 de noviembre. Obviamente Ud. puede enviar sus respuestas antes del plazo final.
- Durante el control se pueden hacer preguntas de aclaración del enunciado, pero de una forma que respete el trabajo de los demás estudiantes. Las preguntas se harán usando el foro del curso en u-cursos y deben estar dirigidas a "Todos".
- El desarrollo del Control debe ser subido en formato .jpg, .pdf u otro de uso común.
- Es importante que el nombre del archivo(s) y en cada hoja de sus respuestas venga contenido su nombre. Además, se deberá indicar claramente a qué número de problema corresponde cada desarrollo.

Importante: Cualquier problema de conexión a internet u otro problema no relacionado con consultas de enunciado antes y durante el Control deberá ser informado al equipo docente usando sus respectivos correos.

Consejo general

¡Muestre su trabajo! Justifique sus respuestas, explique sus razonamientos.

El Control está diseñado para que puedan aplicar los conocimientos adquiridos en este curso.

¡Que les vaya bien!

P1. Método Simplex

1. Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{lllllll}
(P) & \min & 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & \\
 & \text{s.a.} & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 9 \\
 & & -2x_1 & +4x_2 & & = & 4 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

   (a) (0.5 punto) Encuentre una solución básica factible que contenga a la variable x_3 en la base y muestre que no es una solución óptima.

   (b) (1 punto) Haga una iteración de simplex desde la SBF encontrada arriba. Indique la dirección de movimiento a la SBF adyacente, la variable que entra a la base, la variable que sale, el θ^*, y la nueva solución.

   (c) (0.5 punto) ¿Es la nueva solución óptima?

2. Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Para esto considere un problema de forma estándar $\min\ c^T x\ :\ Ax = b,\ x \geq 0$. Justifique su respuesta con una demostración o contraejemplo.

   (a) (1 punto) El problema de fase 1 siempre tiene una solución óptima.

   (b) (1 punto) Si x^* es solución óptima y $x_j^* = 0$ no es variable básica, entonces el rango en que se puede modificar el coeficiente c_j manteniendo la base óptima es $[\bar{c}_j, +\infty)$.

   (c) (1 punto) Si estamos en una SBF degenerada (i.e. al menos una variable basica es =0) entonces el pivote del método de Simplex es degenerado (es decir con paso $\theta^* = 0$)

   (d) (1 punto) Si el método de Simplex se mueve de la SBF x a x', con paso $\theta^* > 0$, no puede nunca volver a la solución x.

P2. Dualidad

1. Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas el problema del emparejamiento máximo es

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{e\in E} x_e & \\ \text{s.a.} & \sum_{e\in\partial(v)} x_e \leq 1 & \forall v \in V \\ & x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E\ , \end{array}$$

donde $\partial(v)$ es el conjunto de aristas incidentes en el vértice v.

   (a) (1 punto) Escriba el problema dual de la relajación lineal del problema del emparejamiento máximo cuando se reeemplaza la restricción de integralidad por $x_e \geq 0$.

   (b) (1 punto) Demuestre que la solución óptima de la relajación lineal del problema de emparejamiento máximo tiene un valor óptimo entre $\frac{m}{n-1}$ y $\frac{n}{2}$.

   (c) Para los siguientes grafos con $V = \{1, 2, \dots, n\}$, encuentre un emparejamiento máximo. Use la parte (b) para demostrar que el emparejamiento es máximo:

      i. (1 punto) Estrella: $E = \{\{1, j\}\ :\ j \in \{2, \dots, n\}\}$

      ii. (1 punto) Linea: $E = \{\{i, i+1\}\ :\ i \in \{1, \dots, n-1\}\}$

2. (2 puntos) Dados los parámetros $a \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$, encuentre el sistema alternante para el sistema de desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq k,\ x_i \geq 0\ i \in \{1, \dots n\}$$

y demuestre que siempre uno de estos sistemas tiene solución.

P3. Optimización entera

1. Considere el programa lineal entero:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 2x_1 & +3x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & \leq 8 & \\
& 2x_1 & +x_2 & \leq 9 & \\
& x_1 & ,x_2 & \in \mathbb{Z}_0^+ &
\end{array}
\tag{PE}
$$

   (a) (1 punto) Escriba la relajación lineal del problema. Grafique sus puntos factibles y encuentre una solución óptima x^* (puede ser por inspección).

   (b) (2.5 puntos) Resuelva el programa (PE) usando Branch & Bound. Puede resolver las relajaciones lineales por inspección.

   (c) (0.5 punto) Calcule el *Gap* entre la solución de (PE) y la solución de su relajación lineal.

   (d) (1 punto) Escriba el poliedro que define exactamente la envoltura convexa de soluciones (enteras) factibles del programa (PE).

2. (1 punto) Escriba un ejemplo de un programa entero tal que la relajación lineal es no-acotada pero el programa entero es infactible.

Pauta

Pregunta 1

1. Pregunta 1.1

   (a) La base B corresponde a [3,2] y la no-base N corresponde a [1], por lo tanto, reemplazando con 0 x_1 en el problema, se obtiene un sistema de ecuaciones de 2 ecuaciones y 2 incógnitas, cuya solución es x= (0,1,5) con un valor óptimo de 2.

   (b) Los costos reducidos son $\bar{C_n} = C_n - C_b^t A_b^{-1} A_n$ con $C_n = 2$, $C_b = (-3, 1)$, $A_n = (3, -2$ y $A_b^{-1} = ((0, 1/4), (1/2, 1/8))$.

   Con estos valores se obtiene que $\bar{C_n} = -3/4$ y por lo tanto X_1 entraría a la base al ser costo reducido negativo.

   Después se calcula la dirección en que hay que moverse para que entre a la base, la cual corresponde a $d_b = -A_b^{-1} A_j$, donde $A_b^{-1} = ((0, 1/4), (1/2, 1/8))$ y $A_b = (3, -2)$ dando igual a que la dirección d_b es igual a $(1/2, -5/4)$ y por lo tanto, el vector total d es igual a $(1, 1/2, -5/4)$ pues faltaba la dirección no básica, la cual es 1 en la coordenada asociada al x que entrará a la base, y 0 en todo el resto que no aparece en d_b.

   Con esto, se puede obtener el θ asociado al movimiento, que nos indica cuanto nos movemos hasta que una de las variables básicas anteriores se hará 0.

   Este se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones $x + \theta d \geq 0$, lo que se vería así al reemplazar:

   $(0, 1, 5) + \theta(1, 1/2, -5/4) \geq 0$ donde es súper fácil notar que la única coordenada que se va a 0 es la asociada a x_3, y se vuelve 0 cuando θ es igual a 4. Por lo tanto el nuevo punto, al reemplazar el theta encontrado en la ecuación, es $\bar{x} = (4, 3, 0)$

   (c) Para ver si $\bar{x}$ es óptimo, debemos calcular sus costos reducidos $\bar{C_n} = C_n - C_b^t A_b^{-1} A_n$ con $C_n = 1$, $C_b = (2, -3)$, $A_n = (2, 0)$ y $A_b^{-1} = ((2/5, 1/10), (1/5, 3/10))$. Lo que entrega un valor total de $3/5 \geq 0$, lo que significa que el punto es óptimo.

2. Pregunta 1.2

   (a) Verdadero: COmo el problema de Fase 1 es siempre factible con la solución (x=0,y=b) y además como se busca hacer min $\sum y$ sujeto a que $y \geq 0$, se tendría que el problema es siempre acotado inferiormente por 0. Estas 2 condiciones nos permitirían asegurar que existe una solución óptima, pues hay un teorema que dice que un problema, si es factible, entonces puede ser no acotado o tener solución óptima.

   (b) ”modificar” hace referencia a que números le puedo sumar a c_j, para que siga siendo óptimo el punto. Por lo tanto esta diciendo que si a c_j le sumas $\bar{C_j}$ (su costo reducido) o más, seguirá siendo óptimo. Para verificar si es que la aseveración es verdadera, es importante recordar la definición de costos reducidos $\bar{C_n} = C_n - C_b^t A_b^{-1} A_n$, y sabiendo que con $\bar{C} \geq 0$ el punto es óptimo, se puede proceder a la obtención del rango.

   Ahora veremos que ε se le puede sumar a c_n para que se siga manteniendo la condición, por lo tanto $C_n + \varepsilon - C_b^t A_b^{-1} A_n \geq 0$, se llega a que $\varepsilon \geq C_b^t A_b^{-1} A_n - C_n$, por lo tanto el rango va desde $[-\bar{C_n}, \infty)$.

   (c) Falso, el algoritmo simplex admite distintas reglas de iteración en caso de empate en los costos reducidos, que es lo usual en soluciones degeneradas. Esta regla de iteración para decidir que costo reducido usar es, en vez del más negativo, es la variable no básica de menor índice entre las candidatas.

Por último, lo que permite usar este argumento es que la regla de bland asegura salir de un punto degenerado.

(d) Verdadero. Simplex es un algoritmo que siempre busca mejorar en valor la función objetivo, por lo tanto volver a una solución anterior implicaría que esta empeorando el valor óptimo, en caso que sea no degenerado. En caso que sea degenerado, se tendría que el valor óptimo mantiene su valor, pero con indicar que $\theta \geq 0$ se tiene que no estamos en ese caso, dado que las iteraciones loop en soluciones degeneradas son con $\theta = 0$.

Pregunta 2

1. (a) El problema relajado corresponde a

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{e\in E} x_e & \\ \text{s.a.} & \sum_{e\in\partial(v)} x_e \leq 1 & \forall v \in V \\ & x_e \geq 0 & \forall e \in E \ , \end{array}$$

donde $\partial(v)$ es el conjunto de aristas incidentes en el vértice v. La razón de no incluir la restricción $x_e \leq 1$ es porque es redundante con la única restricción del problema.
Se deben reconocer en el primal 2 cosas, lo primero es que se tiene una restricción por Vértice, lo que implica que el dual tendrá una variable con sub índice asociado a cada vértice, y que las filas pasan a ser columnas en el dual, por lo que se esperaría que el para todo fuese sumatoria y la sumatoria fuese para todo en este caso. Pero hay un detalle, ¿que hacer con el ∂v?.
Uno esperaría que este fuese en el para todo, pero realmente no siempre es así, para esto se recomienda darse un caso finito.
El caso finito podría haberse hecho con V=[1,2,3] y E=[(1,2),(1,3)], que coincidentemente es uno de los casos a revisar en la parte c).
Su problema primal es de la forma

$$\begin{array}{ll} \max & x_{1,2} + x_{1,3} \\ \text{s.a.} & x_{1,2} \leq 1 \\ & x_{1,3} \leq 1 \\ & x_{1,2} + x_{1,3} \leq 1 \\ & x_{1,2}, x_{1,3} \geq 0 \qquad , \end{array}$$

Lo que nos permite darnos cuenta que siempre habrán arcos repetidos en distintas restricciones, pues es un grafo no dirigido y por lo tanto el que haya un camino entre los nodos 1 y 2 implica que se verá el mismo arco para el nodo 1 y el nodo 2.
Continuando, su dual es de la forma

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{s.a.} & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1 + y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad , \end{array}$$

De este dual podemos obtener información de que, en cada restricción, se esta sumando por las variables que componen el arco asociado a cada restricción primal, es decir, que para $x_{1,2}$ hay una restricción tipo $y_1 + y_2$. Con esta información sabemos que para el dual no es necesario agregar el ∂v a la hora de construir el para todo de la derecha, dado que se están revisando todas las aristas de todas maneras, sería redundante.
Dado esto, el dual genérico pasaría a ser

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{v\in V} y_v & \\ \text{s.a.} & \sum_{v\in e} y_v \geq 1 & \forall e \in E \\ & y_v \geq 0 & \forall v \in V \ , \end{array}$$

(b) Esta pregunta se debe abordar desde algo más simple que los teoremas de dualidad. Uno debía pensarla desde la perspectiva del análisis que se le debe hacer a un problema entero, después de haberlo rejalado. Es por esto que surge la primera pregunta ¿Como sería la solución óptima más fácil de encontrar?

Si nos detenemos en el dual de minimización, se puede notar que este suma sobre todos los y_v, y que cada restricción suma sobre cada arco e, ¿cual sería la más fácil manera de satisfacer esa restricción? bueno, con $y_v = \frac{1}{2}$, la cual también sería óptima pues no hay otra combinación más efectiva que esta en satisfacer todas las restricciones. Con esto hemos obtenido la cota $\frac{n}{2}$ donde el n surge de la cantidad de nodos que tiene el grafo.

Otra manera de obtener esta cota era notar que si se sumaban todas las restricciones, se podía obtener $2\sum_v y_v \geq n$, donde lo de la izquierda es 2 veces la FO, lo que nos da una cota para la FO directamente.

Para el otro problema, se podía abordar desde una lógica similar. Se está sumando sobre TODOS las aristas en la FO, entonces un valor que podría tomar el x_e es 1/total de aristas, y esa solución claramente podría ser factible, porque la suma máxima que daría con los $\sum_{e\in\partial v} x_e$ sería siempre menor e igual a 1 (¿hay efectivamente un caso que de 1 con esta opción?).

Esta es la lógica inicial,pero quizás hay una cota mejor. Es importante a considerar que el máximo de nodos vecinos que puede tener un nodo cualquiera, es n-1, lo que implica que el ∂v máximo es n-1. Esto es fantástico, pues así nos aseguramos que alguna de las restricciones del problema sea activa distinta a $x_e \geq 0$. De esta solución se obtiene que la FO puede tomar el valor $\frac{m}{n-1}$ Esta sería la otra cota claramente factibler encontrada para la función objetivo.

El último argumento, para concluir este problema, es que gracias al teorema de dualidad debil, podemos pasar estas cotas para valor óptimo en general, y así tenemos las cotas en que se puede encontrar el valor objetivo.

(c) Para respondes esta pregunta, se deberá abordar cada caso por separado. Un detalle especial que se debe agregar, es que se esta buscando un valor óptimo en esta pregunta, así que analizar tanto el primal como el dual es válido gracias a el teorema de dualidad fuerte.

i. Este caso se le llama estrella, porque lo que nos describen es que todos los arcos están unidos a 1 solo nodo y por lo tanto la cantidad de conexiones que tiene es igual a n-1 (porque si fuesen n conexiones, se tendría que conectar el nodo central consigo mismo).

Esta información, unida a que el dual busca minimizar la cantidad de nodos a activar sujeto a que se active 1 por arco, nos da que se debe activar el nodo central y por lo tanto el valor óptimo que tendría esa solución sería 1, lo que es equivalente a $\frac{m}{n-1}$, pues m=n-1, y como sabemos por la parte b que el óptimo está entre $\frac{m}{n-1}$ y $\frac{n}{2}$, y sabemos que está es la solución factible que cumple esto (notar que no se puede encontrar una menor asignación factible), por lo tanto es óptima.

Otra manera de argumentarlo era que hay una solución que cumple con el valor óptimo estipulado en b) que es factible (notar que hay casos donde $\frac{m}{n-1}$ y/o $\frac{n}{2}$ son valores óptimos de SBF del problema, entonces uno se queda con el que sería mejor), y hay un corolario de dualidad que dice que si se tiene una solución básica factible que tiene valor óptimo igual al valor óptimo de la solución óptima dual, entonces esa SBF primal es óptima.

ii. Este caso se llama linea porque tenemos 2 nodos extremos, que están conectados a 1 solo nodo, y n-2 nodos internos que están conectados a 2 nodos,lo que da la forma de una linea recta.

En este caso se puede notar, que activar 2 nodos adyacentes sería una mala solución para el problema dual, dado que estarían cubriendo el mismo arco. Una buena solución, y que se puede lograr en este problema es tratar de que cada arco sea tocado por 1 solo vértice activado, como

lo sería en el caso de partir con el nodo adyacente a un nodo externo, y empezar a activar cada 2 aristas desde ahí. Se debe notar que este procedimiento, contempla un total de n-2 aristas que siguen desde el nodo interno adyacente al externo que se activaría primero (la externa y si mismo serían 2, así que quedan n-2) y como desde esos n-2 se pinta cada 2, entonces se estarían activando $\frac{n-2}{2}$ nodos, que sumados con el nodo inicial nos da un total de $\frac{n}{2}$ nodos activados en el dual, que sería equivalente al valor óptimo expresado en la parte b). Se debe notar que activar $\frac{n-1}{n-1}$ nodos en este caso, sería infactible.
Otra manera de argumentar esta solución, es ir por el camino de darse ejemplos, donde se habría llegado a la misma conclusión anterior, pues se habría visto la recurrencia para cualquier n.

2. Para encontrar el sistema alternante, se tenía que tener presente el Lema de Farkas.

   el lema de farkas dice que existe un x talque $ax = b, x \geq 0$ tiene un sistema alternante de la forma $A^t y \geq 0, b^t y < 0$.

   Es por esto, que si se tomaba el problema del enunciado y se transformaba a forma estandard, y luego forma matricial, se podría aplicar directamente el lema y encontrar el alternante rápidamente.

   La forma estandar sería, con s variable de holgura (recordando que a se usa para vector fila).

$$\begin{aligned} a^t x + s &= k \\ x_i &\geq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

   o, siendo aun más específico,

$$\begin{aligned} [a, 1] \cdot [x, s] &= k \\ x_i &\geq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

   También una respuesta usando un $\bar{a}$ estaría bien.

   Dado esto, el sistema alternante queda (y recordando que A se usa para vector columna)

$$\begin{aligned} Ay &\geq 0 \\ 1y &\geq 0 \\ ylibre & \\ b^t y &< 0 \end{aligned}$$

   Por último, el lema de farkas te asegura que siempre uno de estos tendrá solución.

   Otra manera de obtener el alternante, era recordando la demostración del teorema de farkas, donde se contruían un primal con la primera parte, con función objetivo $\min 0$, y de ahí obtenían el problema dual. Dado eso, se ponían en los casos cuando fuese infactible o factible el primal ,y de ahí se obtenía la condición $b^t y < 0$. Una vez obtenida dicha condición, tal como lo hacen en la demostración del lema de farkas, se puede concluir que solo 1 de estos tiene solución al mismo tiempo.

Pregunta 3

- – La relajación vendría dada por

$$\begin{array}{lrrl} \max & 2x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & \leq 8 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 9 \\ & x_1 & ,x_2 & \geq 0 \end{array} \tag{PR}$$

  La región factible corresponde a

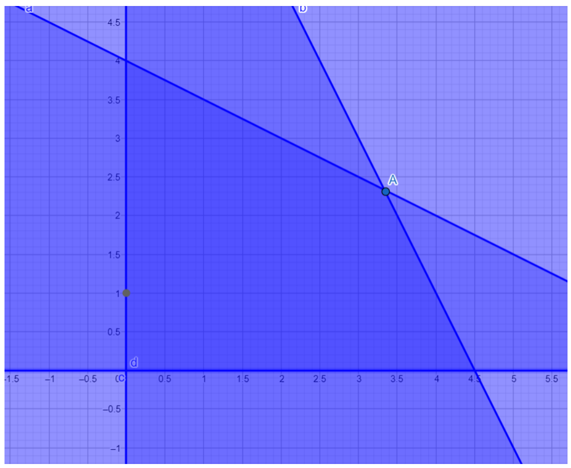

Fig. 1: Región factible.

  Donde el punto A=(10/3,7/3) corresponde al punto óptimo con valor óptimo igual a 41/3 que es aproximadamente 13.66. Notar que las otras esquinas tenían valores óptimos de 12 para (0,4) y 9 para (4.5,0)

  – Se debe inicializar el problema de Branch and Bound teniendo una solución óptima del problema relajado, y fijando el incumbente U=$-\infty$.

  Una manera fácil de contruir la iteración que tomaría menos pasos, es darse cuenta de que la solución óptima entera debe estar lo más probable cerca de la solución relajada, y que se puede ahorrar mucho tiempo si es que nos fijamos que soluciones enteras pasan por las restricciones ya establecidas.

  Es por esto que elegimos restringin x_2 en vez de x_1 en la primera iteración, por lo tanto surgen 2 sub problemas:

  * El primer sub problema es:

$$\begin{array}{lrrl} \max & 2x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & \leq 8 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 9 \\ & & x_2 & \geq 3 \\ x_1 & ,x_2 & & \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

    Donde se tiene que, en esta iteración, el óptimo se obtiene activando la nueva restricción obtenida y la restricción $x_1 + 2x_2 leq 8$, donde se obtiene el punto x=(2,3), el cual claramente es entero con valor óptimo 13, lo que nos permite actualizar el incumbente con U=13 como nuevo valor máximo asociado a una solución entera.

- El segundo sub problema es:

$$\begin{array}{lccc} \max & 2x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & \leq 8 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 9 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ x_1 & , x_2 & & \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

  Donde se puede encontrar, al activar la nueva restricción y la restricción $2_1 + x_2 \leq 9$ el punto (3.5,2) con valor óptimo también 13, el cual claramente no es estrictamente mejor que U y no es entero.

  Dado esto, se puede asegurar que cualquier futura iteración en la rama $x_2 \leq 2$ no obtendrá un valor óptimo mejor dado como función branch and boun y finalmente la solución óptima del problema entero es (2,3) con valor óptimo 13.

- El gap es directo de obtener, es literal restar 13 con el valor óptimo anterior de 13.66, dado que este se define como la distancia a la mejor solución. El valor sería de un total de 2/3 de distancia a la mejor solución desde la solución de la relajación.
- Para escribir el poliedro que envuelve exactamente la envoltura convexa, se debe tener en claro cuales son los puntos extremos de dicha envoltura convexa.

  La metodología para encontrarlos es, cuando el poliedro es graficable, el unir los puntos enteros y ver que figura construye.

  Los puntos enteros que se debían considerar a la hora de armar restricciónes son (desde izquierda abajo hacia la derecha y luego arriba):

  - Puntos enteros desde (0,0) hasta (4,0)
  - (4,0) hasta (4,1)
  - (4,1) hasta (2,3)
  - (2,3) hasta el (0,4)
  - (0,4) hasta el (0,0)

  El hacer este ejercico da el truco para construir el poliedro, pues el decir ”desde este punto hasta este punto”, es lo mismo que buscar una recta que pase por ambos, y es por esto que se puede notar las restricciónes que pasan por dichos puntos respectivamente

  - $x_2 \geq 0$
  - $x_1 \leq 4$
  - $x_1 + x_2 \leq 5$
  - $x_1 + 2x_2 \leq 8$
  - $x1 \geq 0$

- Este ejemplo debía surgir desde la intución de que un problema no tiene una sbf si es que contiene una linea, y por lo tanto no es acotado.

  Algo que es importante recordar, es que una linea es un elemento en 1 dimensión, por lo tanto ”no tiene ancho”, lo que nos permitiría dejar dicha linea entre 2 puntos enteros, como sería el caso del siguiente poliedro:

  - $x_1 \geq 0$
  - $x_1 \leq 1$
  - $x, y \in \mathbb{Z}$