FI3111-1 Mecánica Clásica
Profesor: Fernando Lund Plantat
Auxiliar: Manuel Díaz Zúñiga
Ayudantes: Pedro Aguilera Rojas y Kevin Vásquez

Auxiliar 11: Transformaciones canónicas y corchetes de Poisson

13 de noviembre de 2024

P1. Expansión en corchetes de Poisson

Demuestre que el valor de cualquier función $f(q(t), p(t))$ de las coordenadas y el momento de un sistema a un tiempo t puede ser expresado en términos de los valores de q y p a tiempo $t = 0$ como

$$f\left(q(t), p(t)\right) = f + \frac{t}{1!}\{H, f\} + \frac{t^2}{2!}\{H, \{H, f\}\} + ... \tag{1}$$

donde $f = f\left(q(0), p(0)\right)$ y $H = H\left(q(0), p(0)\right)$ es el Hamiltoniano. (Asuma que la serie converge).

Aplique esta fórmula para evaluar $q(t)$, $p(t)$, $q^2(t)$, y $p^2(t)$ para los casos:

a) Una partícula moviéndose en un campo uniforme de fuerzas.
b) Un oscilador armónico.

P2. Transformaciones canónicas

a) Muestre que la transformación

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_Y}{m\omega}\sin\lambda, \tag{2}$$
$$p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_Y\cos\lambda, \tag{3}$$
$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_X}{m\omega}\sin\lambda, \tag{4}$$
$$p_x = -m\omega Y\sin\lambda + P_X\cos\lambda, \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

es una transformación canónica.

b) Considere una partícula cargada, de masa m y carga q, se mueve bajo la influencia de un campo magnético constante $\vec{B}$, el cual es descrito por un potencial vector de la forma $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. La dinámica del sistema es descrita por el Hamiltoniano

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qBx)^2. \tag{7}$$

Aplique la transformación anterior a este Hamiltoniano y describa su movimiento.