

FI3111-1 Mecánica Clásica

Profesor: Fernando Lund Plantat

Auxiliar: Manuel Díaz Zúñiga

Ayudantes: Pedro Aguilera Rojas y Kevin Vásquez



Auxiliar 10: Routhiano y Hamiltoniano

6 de noviembre de 2024

P1. Ecuaciones de Routh:

El objetivo de esta pregunta es derivar las ecuaciones del formalismo Routhiano, el cual consiste básicamente en una mezcla del formalismo Lagrangiano y del Hamiltoniano. Considere un sistema de dos grados de libertad q y η .

- Considerando el Lagrangiano $L(q, \eta, \dot{q}, \dot{\eta})$ y $R(q, \eta, p, \dot{\eta}) = p\dot{q} - L$, con p el momento de la coordenada q . Encuentre los diferenciales de L y R .
- Muestre que para R (de aquí en adelante Routhiano) existen ecuaciones Hamiltonianas y Lagrangianas. ¿Que sucede si consideramos q como una coordenada cíclica?.
- Generalice el resultado de las partes anteriores para una cantidad arbitraria de coordenadas generalizadas y coordenadas cíclicas.
- Considere el siguiente Lagrangiano:

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + mgl \cos(\theta) + F\theta + \mu\dot{\theta}t. \quad (1)$$

Encuentre el Routhiano del sistema. Respecto a este Routhiano, encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema.

P2. Ecuaciones de Hamilton

- Determine el Hamiltoniano de un oscilador anarmónico cuya dinámica es descrita por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2 \quad (2)$$

- Encuentre el Lagrangiano del sistema para un Hamiltoniano descrito por
 - $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{p} \cdot \vec{a}$, con \vec{a} constante.
 - El Hamiltoniano de un haz de luz $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r})}$, con $n(\vec{r})$ el índice de refracción bajo aproximación de óptica geométrica
- Encuentre las ecuaciones de movimiento para (4) y determine su trayectoria considerando $n(\vec{r}) = \alpha x$.