

FI3111-1 Mecánica Clásica

Profesor: Fernando Lund Plantat

Auxiliar: Manuel Díaz Zúñiga

Ayudantes: Pedro Aguilera Rojas y Kevin Vásquez



Auxiliar 9: Aproximaciones sucesivas y mapas iterados

23 de octubre de 2024

P1. Oscilador no lineal:

Considere la siguiente ecuación de movimiento para un oscilador no lineal:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3$$

Resuelva esta ecuación mediante el método de aproximaciones sucesivas justificando las aproximaciones realizadas.

P2. Molécula CO_2 no lineal

Considere una molécula de CO_2 (ver figura 2) cuyos modos de oscilación longitudinal y flexural están acoplados, la cual clásicamente se puede describir como un oscilador no lineal en dos dimensiones cuya dinámica está descrita por las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{x} + \omega^2 x - 2\alpha xy = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y - \alpha x^2 = 0. \quad (2)$$

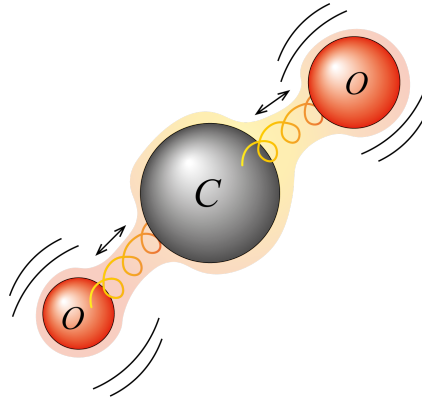


Figura 1: Molécula de CO_2 .

- Encuentre el Lagrangiano del sistema.
- Proponga soluciones del tipo

$$a \cos(\omega t + \phi) = Ae^{i\gamma t} + A^* e^{-i\gamma t}. \quad (3)$$

para el sistema $2D$. Encuentre la ecuación que describe la dinámica de la amplitud.

Hint Considere que la oscilación de la amplitud varía lentamente $|\ddot{A}| \ll \omega|\dot{A}| \ll \omega^2|A|$.

Hint Note que x e y no tienen la misma frecuencia. Busque soluciones en variable compleja.

- c) Encuentre dos cantidades conservadas y reduzca el problema a una ecuación efectiva de amplitud.
- d) Grafique el potencial efectivo de la amplitud. Analice el comportamiento de la amplitud y comente sus resultados.

P3. Mapa de Poincaré

Considere que el movimiento de un sistema de ecuaciones de movimiento de la forma

$$\dot{r} = \mu r(1 - r^2) \tag{4}$$

$$\dot{\theta} = \omega \tag{5}$$

- a) Calcule la solución analítica del sistema de ecuaciones para la condición inicial en $t_0 = 0$, $(r_0, \theta_0) = (r_0, 0)$. Grafique la solución para un periodo de oscilación.
- b) Estudie los puntos fijos y analice su estabilidad. Note que este se trata de un ciclo límite.