FI3111-1 Mecánica Clásica
Profesor: Fernando Lund Plantat
Auxiliar: Manuel Díaz Zúñiga
Ayudantes: Pedro Aguilera Rojas y Kevin Vásquez

Auxiliar Extra:

8 de octubre de 2024

P1. Inestabilidad en el puente de Tacoma:

Una descripción simplificada de un puente colgante como el de Tacoma, bajo la influencia del viento es considerar que este es descrito por sus modos de torsión y desplazamiento transversales (flexión simétrica). La dinámica de estos modos cerca del equilibrio es descrita por las variables $X(t)$ e $Y(t)$ respectivamente, las cuales satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\ddot{X} = -\omega^2 X - MY + \alpha v Y \tag{1}$$
$$\ddot{Y} = -\Omega^2 Y - MX, \tag{2}$$

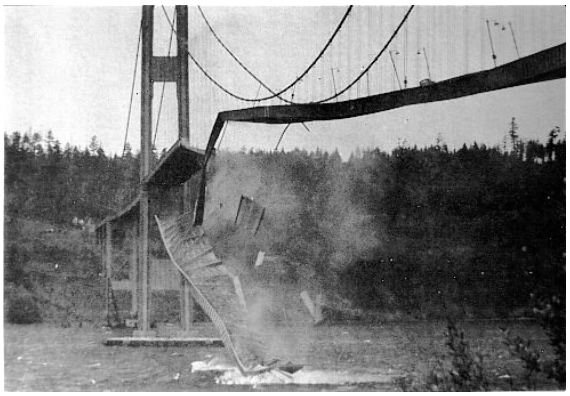

Figura 1: Puente de Tacoma colapsando.

donde ω es la frecuencia natural de oscilación de los modos desacoplados, M es el término de acoplamiento elástico entre los modos, v es la velocidad del viento y α es un factor de forma.

Realice análisis de estabilidad mediante el estudio de valores propios y encuentre el valor crítico de v para el cual ocurre el fenómeno de confusión de frecuencias, es decir, cuando dos valores propios complejos conjugados colisionan (parte imaginaria distinto de cero) y se salen del eje imaginario.

Extra:

Considere el siguiente sistema físico acoplado y analice su estabilidad.

$$m\ddot{x} = -ax + cxy^2 \tag{3}$$
$$m\ddot{y} = -by + cx^2 y \tag{4}$$

Con a, b de dimensiones $\left[\frac{Newton}{m}\right]$ y c $\left[\frac{Newton}{m^3}\right]$. **Hint**: Utilice la matriz Jacobiana y/o la Hessiana para sus análisis. Utilice que $\vec{F} = -\partial_x V\hat{x} - \partial_y V\hat{y}$.

P2. (Propuesto) Análogo mecánico de un Láser:

Considere el siguiente sistema mecánico, con $l = l_1 = l_2$ y $m = m_1 = m_2$, el cual consiste en un péndulo esférico al cual se añade un péndulo simple que está restringido a moverse en el plano perpendicular a la vertical, como se ve en la figura 2. Este sistema mecánico satisface la dinámica de un láser, descrito por las ecuaciones de Maxwell-Bloch.

a) Encuentre el Lagrangiano asociado y derive las ecuaciones de movimiento.

b) Encontrar e interpretar las cantidades conservadas. ¿Es integrable el sistema?

c) Calcule los equilibrios del sistema y estudie su estabilidad.

d) Estudie pequeñas oscilaciones alrededor de los equilibrios.

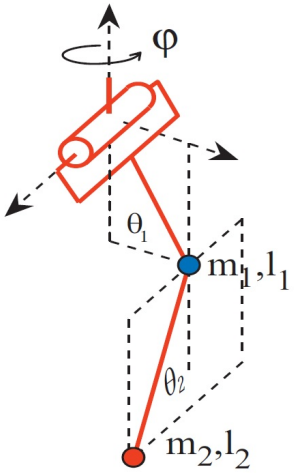

Figura 2: Péndulo esférico doble restringido

P3. (Propuesto) Principio de mínima acción en la superficie de la tierra:

Muestre que las geodésicas (línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie) de una superficie esférica corresponden a circunferencias cuyo centro coincide con el de la esfera. **Hint:** Plantee una ecuación de movimiento y luego describa que condición deben cumplir los puntos de la superficie para intersectar al plano.

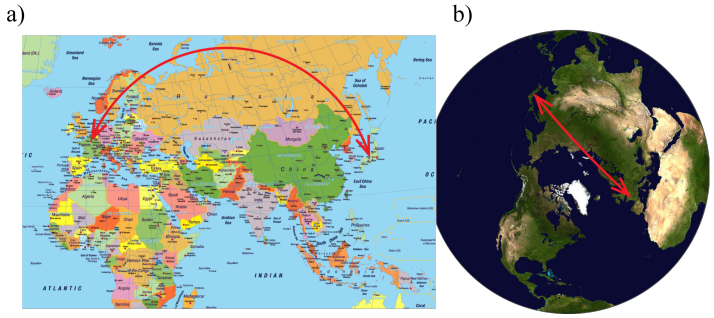

Figura 3: Geodésicas trazadas por vuelo entre París y Tokio.

P4. (Propuesto) Potencial de Yukawa para fuerzas centrales:

En 1935, Hideki Yukawa propuso el siguiente potencial para modelar la interacción nuclear fuerte que ocurre entre nucleones (protones y neutrones). Considere el siguiente potencial central

$$U(r) = -\frac{\alpha e^{-\beta r}}{r}, \tag{5}$$

donde $\alpha, \beta > 0$.

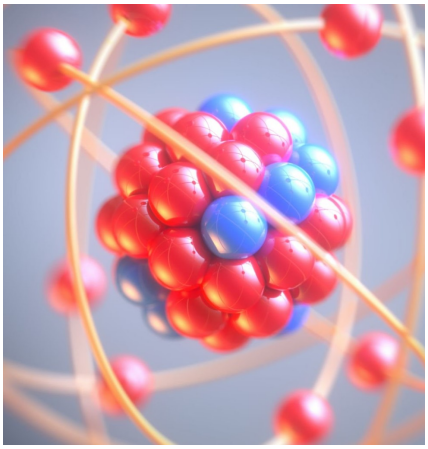

Figura 4: Nucleo atómico.

a) Encuentre el potencial efectivo $U_eff(r)$ asociado a una partícula de masa m que orbita en un radio r.

b) Estudie las orbitas del sistema y determine la energía mecánica E y la magnitud l_0 del momento angular asociados a una órbita circular de radio R bajo este potencial. ¿Que tipo de trayectorias exhibe?

c) Calcule la expresión para dichas orbitas.

d) Estudie el límite de la expresión cuando r es muy grande. ¿Qué forma adquiere el potencial?

P5. (Propuesto) Scattering y Ley de Snell:

Considere una partícula de energía E la cual pasa por una región con potencial $-V_0$ (ver figura 5).

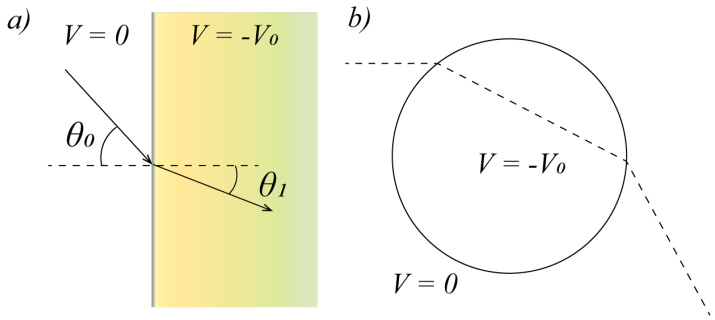

Figura 5: Ley de Snell para región de potencial $-V_0$.

a) Muestre que la partícula es refractada y que el ángulo de incidencia, θ_0, y el ángulo de refracción, θ_1, satisfacen la Ley de Snell

$$\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(\theta_1)} = n, \tag{6}$$

donde los ángulos son medidos con respecto a la normal y $n = \sqrt{1 + V/E}$ es el índice de refracción.

b) Si una partícula que incide con un parámetro de impacto b sobre un potencial cuadrado

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & si \quad r \leq a \\ \\ 0 & si \quad r > a. \end{cases} \tag{7}$$

es scattereada en un ángulo θ que satisface la relación

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2 \sin^2(\theta/2)}{n^2 + 1 - 2n\cos(\theta/2)} \tag{8}$$

c) Calcule la sección eficaz diferencial de scattering.

P6. (Propuesto) Cono rodante:

Considere un cono recto homogéneo de masa total M, con base de radio R, altura h, y con un ángulo de apertura 2α, como se ve en la figura 6.

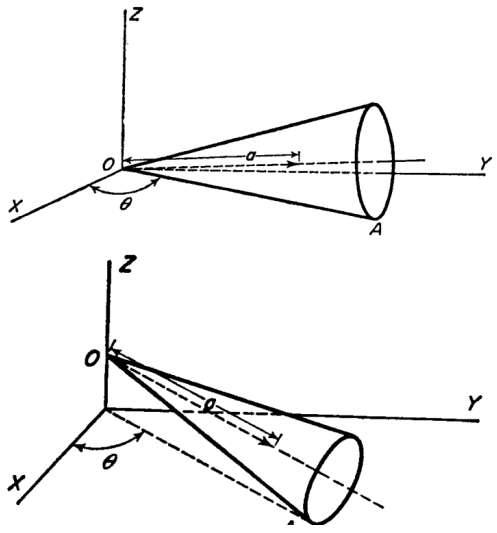

Figura 6: Cono rodante. a) Cono sobre el plano. b) Cono con vértice en altura.

a) Demuestre que los momentos principales de inercia con respecto al vértice del cono son $I1 = I2 = \frac{3M}{5}\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)$, $I_3 = \frac{3MR^2}{10}$

b) Determine el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para cuando el cono rueda sobre un plano (figura 6.a)

c) Determine el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para cuando la base del cono rueda sobre un plano y cuyo vértice está fijo a una altura sobre el plano igual al radio de la base (figura 6.b).

P7. (Propuesto) Péndulo en parábola

Considere una parábola de concavidad α, la cual tiene roce despreciable con la superficie. Un anillo de masa despreciable puede deslizarse sobre la parábola sin roce. El anillo tiene a su vez enlazado un péndulo de masa m y largo l, el cual está restringido a moverse en el plano de la parábola. La parábola es sometida a girar con respecto a la vertical con una velocidad angular ω constante, como muestra la Figura 7.

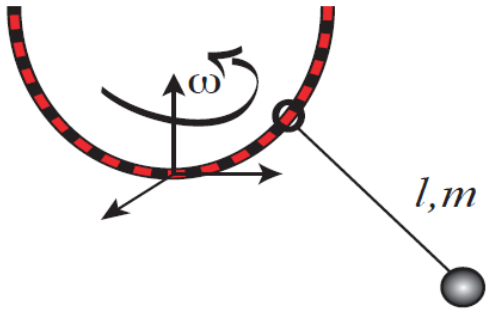

Figura 7: Péndulo de Andronov modificado.

a) Encontrar el Lagrangiano del péndulo y las ecuaciones de movimiento del péndulo.

b) Encontrar los equilibrios del sistema para pequeñas oscilaciones, en función del espacio de parámetros del sistema.

c) Considere que existe un roce lineal proporcional a la velocidad de la masa con la superficie, con constante de proporcionalidad λ. Caracterice los equilibrios como en el ítem anterior. Puede realizar todas las aproximaciones que estimen convenientes, justificándolas. Puede ser útil resolver numéricamente para corroborar los resultados analíticos.

d) Caracterizar numéricamente las bifurcaciones en el espacio de fase del sistema con y sin roce.