P1 Interpolación:

- Objetivo: estimar una función de la cual sólo conocemos una serie de $n+1$ puntos (x_i, y_i)
- Método de Lagrange: Estimar la función a través de un polinomio de grado n, se expresa como:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x)$$

y_i son las coordenadas y conocidas
l_i se llaman funciones cardinales: $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Problema: La densidad del aire ρ varía con la altura h de la siguiente manera

h (km)	0 (x_0)	3 (x_1)	6 (x_2)
ρ (kg/m³)	1.225 (y_0)	0.905 (y_1)	0.652 (y_2)

Exprese $\rho(h)$ interpolando con el método de Lagrange.

Escribimos las funciones cardinales

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x-3}{-3}\cdot\frac{x-6}{-6} = \frac{1}{18}(x-3)(x-6)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} = \frac{x}{3}\cdot\frac{(x-6)}{-3} = -\frac{1}{9}x(x-6)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{x}{6}\cdot\frac{(x-3)}{3} = \frac{1}{18}x(x-3)$$

Luego el polinomio es:

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = 1.225\frac{1}{18}(x-3)(x-6) - 0.905\frac{x(x-6)}{9} + 0.652\cdot\frac{x(x-3)}{18}$$

$$= 0.003722h^2 - 0.1178h + 1.225$$

P2 Integración numérica

Determine $\int_1^\infty (1+x^4)^{-1}dx$ con la regla trapezoidal usando cinco paneles

usamos el c.v $t = \frac{1}{x^3}$, $dt = -\frac{3}{x^4}dx$ $\quad x = t^{-1/3}$

$$\longrightarrow \int_1^0 -\frac{1}{(1+t^{-4/3})}\cdot\frac{t^{-4/3}}{3}dt$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\cancel{t^{4/3}}}{t^{4/3}+1}\cdot \cancel{t^{-4/3}}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{t^{4/3}+1} \qquad f(t) = \frac{1}{t^{4/3}+1}$$

Y podemos integrar usando trapecio.
Con 5 paneles, los rangos de integración son $[\underbrace{0, 0.2}_{(1)}, \underbrace{0.4}_{(2)}, \underbrace{0.6}_{(3)}, \underbrace{0.8}_{(4)}, \underbrace{1}_{(5)}]$
El ancho es entonces $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$
Y el resultado es:

$$I = \sum_{i=0}^{5} I_i, \quad I_i = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)\right]$$

$$0.1\left[\underbrace{f(0)}_{1} + 2\left(f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)\right) + \underbrace{f(1)}_{0.5}\right]$$

P3| Integración Gaussiana (o Cuadratura Gaussiana)

Evaluar $\int_1^{\pi} \frac{\ln(x)}{x^2-2x+2}\,dx$ usando Gauss-Legendre con:

a) Dos nodos
b) Cuatro Nodos

Para Gauss-Legendre necesitamos que los límites sean -1 y 1. Típicamente podemos usar

$$\int_a^b f(x)\,dx \rightarrow \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\Big(\underbrace{\tfrac{2}{b-a}\Big[x-\tfrac{b+a}{2}\Big]}_{x}\Big)\,d\xi \sim \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i\, f(x_i)$$

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$$

Luego:

$$x = \frac{\pi+1}{2} + \frac{\pi-1}{2}\xi$$

Con 2 nodos $\Rightarrow n=1$

$\xi_+ = 0.577350 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi+1}{2} + \frac{\pi-1}{2}\xi_+$

$\xi_- = -0.577350 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi+1}{2} + \frac{\pi-1}{2}\xi_-$

$A_+ = A_- = 1$

Con 4 nodos $n=3$

$\xi_\pm^1 = \pm 0.339981$, el peso es: $A_1 = 0.652145$

$\xi_\pm^2 = \pm 0.861136$, el peso es: $A_2 = 0.347855$

P4| Raíces de ecuaciones

La menor de las raíces positivas de $\cosh x \cos x - 1 = 0$ se ubica en el intervalo $(4, 5)$. Calcúlela con el método de Ridder y Newton Rhapson. Muestre que Newton Rhapson no converge si el punto inicial es $x=4$.

- Newton-Rhapson:

$$x_{new} \longrightarrow x_{old} - \frac{f(x_{old})}{f'(x_{old})}$$

$\downarrow$ $x_{inicial} = 4.5$

raíz: $\underline{x = 4.73}$

$f(x) = \cosh x \cos x - 1$

$f'(x) = \operatorname{senh} x \cos x - \cosh x \operatorname{sen} x$

- Ridder

$x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 4.5$

$f_1 = -18.8$
$f_2 = 20.05$
$f_3 = -10.48$

$S = \sqrt{f_3^2 - f_1 f_2} = 22.06$

$x_4 = x_3 \pm (x_3 - x_1)\frac{f_3}{S}$ $\quad f_1 < f_2 \Rightarrow -$

$x_4 = x_3 - (x_3 - x_1)\frac{f_3}{S} \Rightarrow x_4 = 4.737$

$\downarrow$ queda entre (x_3, x_4) → $x_3 \to x_1$, $x_4 \to x_2$

y empieza nuevamente.