Auxiliar #13 Antenas y Polarización

Profesor: Claudio Romero
Auxiliar: José Mondaca

P1 Radiación de una Antena

Considere una antena delgada de largo 2d, centrada en el origen y extendida a lo largo del eje z, con una corriente I(z,t) descrita por:

$$I(z,t) = I_0 \sin[k(d-|z|)]e^{-iwt} \qquad\qquad -d \leq z \leq d \tag{1}$$

donde k=w/c.

a) Calcule una expresión para $\mathbf{A(r)}$ a distancias $r >> d$ y $r >> \lambda = 2\pi/k$, pero sin asumir ninguna jerarquia entre λ y d.

Hint: Recuerde que para distancias de la fuente r mucho mas grande que el tamaño caracteristico d de la fuente ($r >> d$) y que la longitud de onda radiada ($r >> \lambda$), la parte espacial del potencial vectorial en el Gauge de Lorenz viene dada por:

$$\mathbf{A(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\mathbf{J}e^{-ik\hat{r}\cdot\mathbf{r}'} \tag{2}$$

b) Obtenga una expresión para la potencia radiada por unidad de ángulo sólido promediada.

c) Para el resultado de la parte anterior, determine el límite $\lambda >> d$. Comente su resultado.

P2 Elípse de Polarización

Sea una onda plana con vector de onda $\vec{k} = k\hat{k}$ y un triedro de vectores: $\{\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{k}\}$. $\hat{e_1}$ y $\hat{e_2}$ es la base en que se escribe $\vec{E}$ y$\vec{B}$. Además se cumple que:

$$\hat{e_1} \cdot \hat{e_2} = 0 \qquad\qquad \hat{e_1} \times \hat{e_2} = \hat{k} \tag{3}$$

Dado lo anterior, podemos escribir el campo eléctrico como

$$\vec{E} = (\mathcal{E}_1\hat{e_1} + \mathcal{E}_2\hat{e_2})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)} \tag{4}$$

Si luego escribimos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ en forma polar:

$$\mathcal{E}_1 = Ae^{i\delta_1} \qquad\qquad \mathcal{E}_2 = Be^{i\delta_2} \tag{5}$$

a) Muestre que se debe cumplir que

$$\frac{E_1}{A}\sin\delta_2 - \frac{E_2}{B}\sin\delta_1 = \sin(\delta_2 - \delta_1)\cos\phi \tag{6}$$

$$\frac{E_1}{A}\cos\delta_2 - \frac{E_2}{B}\cos\delta_1 = \sin(\delta_2 - \delta_1)\cos\phi \tag{7}$$

Donde $\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - wt$ y E_1 , E_2 son las componentes reales del campo eléctrico tal que

$$Re(\vec{E}) = E_1\hat{e_1} + E_2\hat{e_2} \tag{8}$$

b) Usando lo anterior, muestre que

$$\left(\frac{E_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{B}\right) - 2\left(\frac{E_1}{A}\right)\left(\frac{E_2}{B}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \tag{9}$$

Con $\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$