Electromagnetismo FI2002-5 Primavera 2024
Profesor: Claudio Arenas
Auxiliares: Pablo Guglielmetti, Martín Leiva
Ayudante: Gerd Hartmann

Auxiliar 27: Súper-dúper-hiper-mega aux final

P1: Esfera Wekita

Una esfera dieléctrica de radio R_1 y susceptibilidad eléctrica χ_e, posee una densidad de carga volumétrica desconocida. Al rededor de este se coloca un casquete esférico de radios interior R_1 y exterior R_2, el cual tiene densidad de carga homogénea ρ_0. A pesar de que no se conoce la densidad de carga en la esfera interior, se sabe que el potencial eléctrico en el interior de la esfera de radio R_1 es de la forma

$$V(r) = V_0 \frac{r - R_1}{r}$$

a) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio *Hint:* Trate el problema con principio de superposición.

b) Calcule el potencial eléctrico $V(r)$ en todo el espacio

c) Realice los análisis previos pero para el caso donde el casquete exterior es un conductor. ¿Cuánto valen las densidades de carga inducidas y libres del conductor?

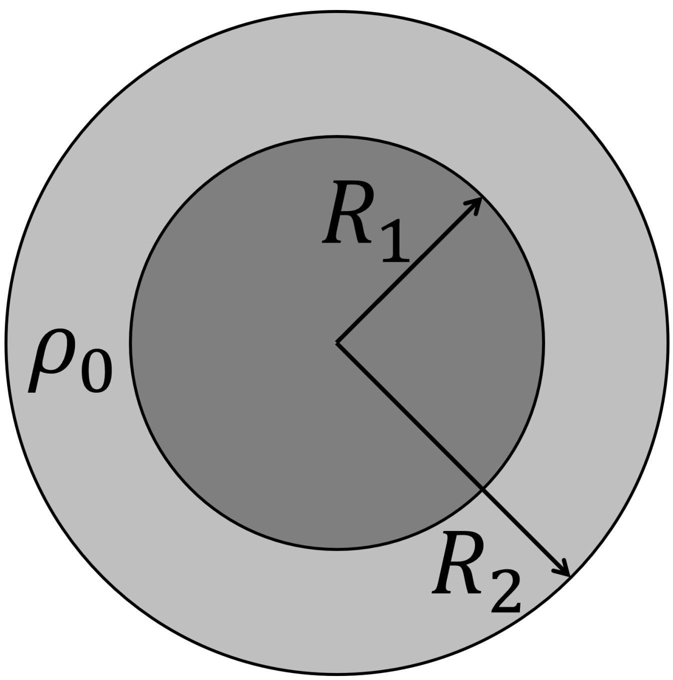


Figura 1: P1

P2:

Un alambre cilíndrico de largo L está formado por dos materiales conductores dispuestos coaxialmente: uno, que constituye el núcleo de radio a, tiene conductividad g_1; el otro, que lo recubre hasta un radio b, tiene conductividad g_2. Los extremos superior e inferior se mantienen a potenciales $V = V_0$ y $V = 0$, respectivamente, determine:

a) La densidad de corriente $\vec{J}$ en el alambre, distinguiendo los casos $\rho < a$ y $a < \rho < b$.

b) Encuentre el campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ en todo el espacio.

c) Encuentre la densidad de corriente K en la superficie exterior del cable para que se anule el campo magnético fuera del cable ($\rho > b$)

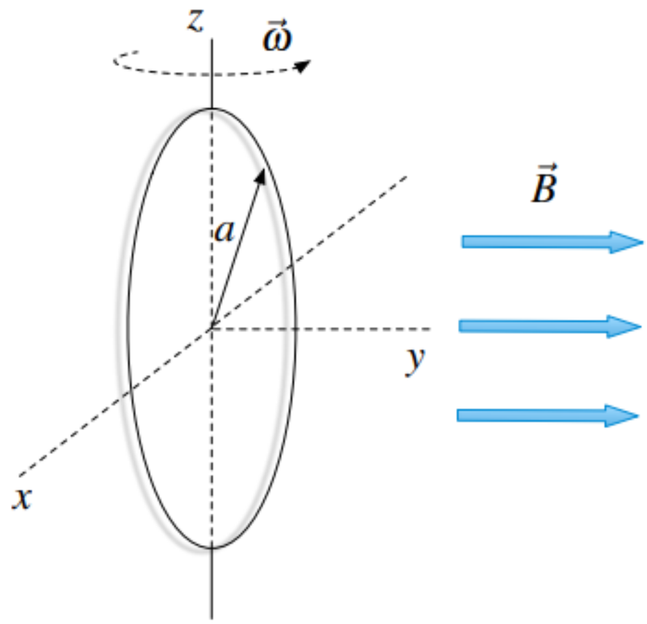


Figura 2: Esquema del problema 3.

P3: Considere una espira circular de radio a que yace sobre el plano xz. En $t = 0$ la espira comienza a girar con una velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$. Si en el espacio existe un campo magnético constante y homogéneo de valor $\vec{B} = B_0 \hat{y}$, determine:

a) La fem inducida en la espira.

b) La corriente en función del tiempo que circula por la espira, si la espira posee una resistencia R y una autoinducción L.

c) El torque que siente la espira, suponiendo que ésta ha estado rotando un tiempo muy largo.

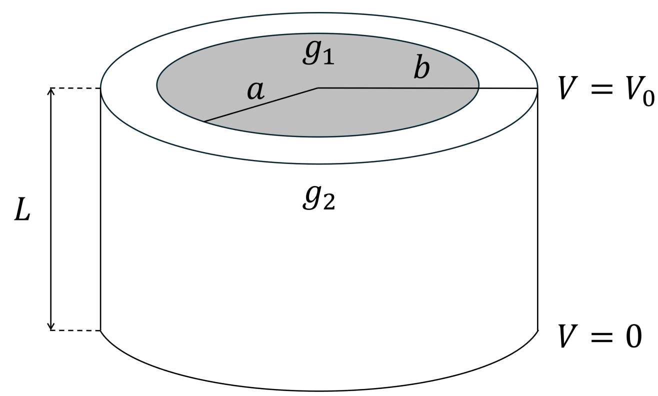


Figura 3: P2

Resumen

Teorema de Gauss en electrostática

Para una superficie ∂V cerrada y orientable, y un campo eléctrico $\vec{E}$ bien definido sobre todo el volumen V se tiene que:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

con $\nabla \cdot E$ la divergencia del campo eléctrico.

Cálculo de Potencial
A priori hay dos formas **equivalentes** típicas de calcular el potencial electrostático:

$$\Delta V = V(r) - V(\vec{r}_{ref}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \qquad ; \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{2}$$

Dieléctricos
En materiales dieléctricos (lineales) resulta mucho más útil trabajar con el vector desplazamiento $\vec{D}$, este está definido de la siguiente forma:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

con $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ la permitividad del dieléctrico y $\vec{E}$ el campo eléctrico.

El vector polarización expresa el momento dipolar por unidad de volumen del dieléctrico, puede ser permanente o inducido, pero en dieléctrico lineales se cumple que:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Es importante saber que: $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ y $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$.
Con σ_b la densidad de carga de polarización y ρ_p la densidad de carga de polarización.

Condiciones de Borde

$$E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \sigma/\epsilon_0 \qquad E_2^{||} - E_1^{||} = 0$$

Otra forma de definirlas es por

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n}_{12} = \sigma/\epsilon_0 \qquad \hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

Donde $\hat{n}_{12}$ es la normal que va desde el medio 1 hacia el medio 2.
Corriente
Definimos la corriente I como la carga que pasa por una cierta área por unidad de tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

En ciertos casos es útil definir la densidad de corriente volumétrica $\vec{J}$ de tal forma que

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

Resumen

Con esto se puede deducir que la densidad de corriente volumétrica es

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}$$

Donde $\rho(\vec{r})$ es la densidad de carga y $\vec{v}$ es la velocidad de las partículas cargadas.
Es usual también definir una corriente superficial $\vec{K}$, la cual cumple

$$\int_{\Gamma} (\vec{K} \times \hat{n}) \cdot d\vec{l} = I$$

Donde S es el área transversal y Γ es la curva transversal a la corriente, en este caso

$$\vec{K}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\vec{v}$$

Donde $\sigma(\vec{r})$ es la densidad de carga superficial.

Ley de Ampère

De la ley de Biot-Savart se tiene que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Esta ley tiene el beneficio de que nos permite lidiar con problemas de alta simetría, tal y como pasaba con Gauss. En virtud del teorema de Stokes se tiene que

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

Donde I_{enc} es

$$I_{\text{enc}} = \int\int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Luego, si se tiene alta simetría en el problema, se puede obtener la dirección del campo magnético con la regla de la mano derecha. Así, la integral es fácil de resolver y se despejaría el campo magnético.

Ley de Faraday

Para añadir dinámica a los campos, modificaremos el hecho de que

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Ahora se dirá que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Es decir, el campo eléctrico deja de ser un campo conservativo, por lo que ya no es posible definirse un potencial. Al realizar una integral de superficie a la ley de Faraday y aplicar el teorema de Stokes, se tiene que

$$\vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Donde $\vec{E}$ es la fuerza electromotriz (fem) y Φ es el flujo magnético, los cuales vienen dados por

Resumen

$$\vec{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{y} \quad \Phi = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Debido a que estas relaciones salen de aplicar el teorema de Stokes, se debe de seguir la regla de la mano derecha.

Autoinductancia

De forma idéntica al caso anterior, un circuito se puede autoinducir al tener una corriente variable. La fem autoinducida en ese caso viene dada por

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad \Phi = LI$$

Donde L se le llama la inductancia.

Comportamiento circuital

Desde las leyes de Kirchhoff se puede estudiar el comportamiento de la corriente i que circula por un circuito. Con una resistencia equivalente R, una autoinductancia L y una fem inducida por un campo magnético externo $\mathcal{E}$. Se deriva la edo:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}$$

Leyes de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Ley de Gauss} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Ley de Gauss Magnética}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \text{Ley de Faraday} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$

P2

a) Podemos obtener el campo eléctrico que existe a lo largo del cable si asumimos que este es uniforme y en la direccion del cable. Esta suposiciones son adécuelas pues las propiedades del material son uniformes. Se tiene que:

$$V = \int \vec{E} \cdot \vec{dl} \xrightarrow{\vec{E} \text{ uniforme}} \vec{E} \int dl = E \cdot L$$

$$\Rightarrow \vec{E} = V/L \, \hat{z}$$

Donde z es la direccion del largo del cable.

Con ley de Ohm tenemos:

$$\boxed{\vec{J} = g \vec{E}} \qquad g = \text{conductividad}$$

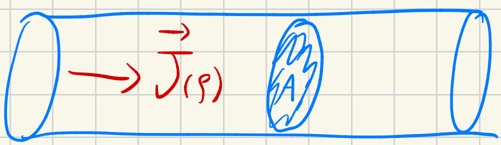
Nos dice que la densidad de corriente que corra por el conductor sera proporcional al campo eléctrico existente y a la conductividad del material.

Como ya tenemos mos el campo existente dentro del cable y las conductividades son conocidas podemos obtener la corriente en los conductores.

$$g = \begin{cases} g_1 & 0 < \rho < a \\ g_2 & a < \rho < b \end{cases}$$

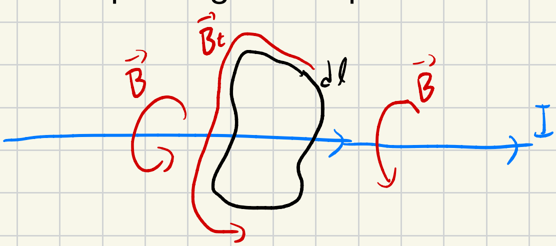
$$\Rightarrow \quad \vec{J} = \begin{cases} g_1 \frac{V}{L}\hat{z} & 0<\rho<a \\ g_2 \frac{V}{L}\hat{z} & a<\rho<b \end{cases}$$

La densidad de corriente J nos dice cuanta carga esta pasando por el conductor por unidad de area, para obtener la carga total hay que integrarlo por el area transversal del cable.



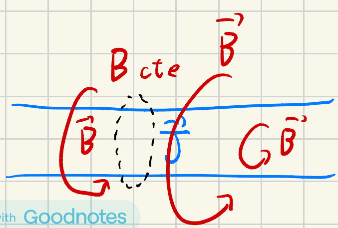
$$I = \int_A \vec{J}_{(\rho)} \cdot d\vec{S}$$

b) Para la parte (b) sabiendo que que existe una simetría rotacional usaremos la ley de Amperé para obtener el campo magnetico de una manera mas sencilla.
La ley de Amperé nos dice que la corriente que pasa a travez de una region plana cualquiera del espacio es proporcional al campo magnetico que recorre el borde de esa region.



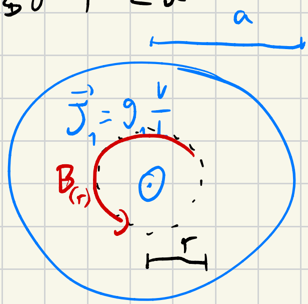
$$\mu_0 I = \int \vec{B}^t \cdot dl$$

Si tomamos una region circular concentrica al cable podemos asegurarnos por simetria que el campo sera uniforme en todo el borde.



Expresaremos la ley para un radio arbitrario para obtener el campo magnetico en cualquier punto del espacio. Separaremos por casos:

Caso $r < a$



Ley de Ampere:

$$\mu_0 I = \int B_{(r)} \cdot dl$$

$$= \mu \int \vec{J}_{(r)} dS = \int B_{(r)} \cdot dl$$

Como $\vec{J}$ y $\vec{B}$ son uniformes en sus regiones salen de la integral.

$$= \mu \vec{J} \int dS = B_{(r)} \int dl$$

$$= \mu_0 \vec{J} \cdot (\text{Area}) = B_{(r)} \cdot (\text{Perimetro})$$

$$= \mu_0 g_1 \frac{V}{L} \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} = B_{(r)}\, 2\cancel{\pi} \cancel{r}$$

Despejamos $B_{(r)}$

$$B_{(r)} = \frac{\mu g_1 V r}{2L}$$

Caso $a<r<b$:

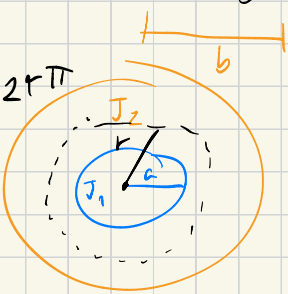
análogo a lo anterior tenemos:

$$I\mu_0 = \mu \int J \cdot dS = \int B(r)\, dl$$

En este caso solo el campo es uniforme en el perimetro, pues la densidad de corriente es uniforme en cada una de los matereales. Para calcular la corriente tendremos que separar la integral en cada matereal.

$$\mu_0 I = \mu_0 \left(\int_0^a \int_0^{2\pi} J_1\, r\, dr\, d\theta + \int_a^r \int_0^{2\pi} J_2\, r\, d\theta\, dr = B(r) \int dl \right.$$

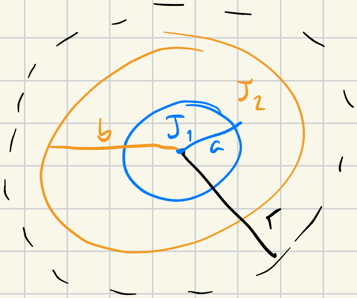
$$= \mu \left(J_1 \pi a^2 + J_2 \pi (r^2 - a^2) \right) = B(r)\, 2r\pi$$



$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 V (g_1 a^2 + g_2 (r^2 - a^2))}{2L}$$

Notemos que consideramos todo la corriente que pasa por el conductor uno pero solo parte de la corriente que pasa por el conductor 2, pues la region no abarca toda el area transversal del cable, y la corrriente usada en la ley de ampere es la que atraviesa dentro de la region plana.

Caso $r > b$:



En este caso la corriente que atravieza la region es toda la corriente que pasa por el cable.

$$\mu_0 I = J_1 \overbrace{(a^2\pi)}^{\text{Area } g_1} + J_2 \overbrace{(\pi(b^2-a^2))}^{\text{Area } g_2} = \int B_{(r)} d\ell$$

$$\frac{\mu_0 V (g_1 a^2 \pi + g_2 \pi (b^2 - a^2))}{L} = B_{(r)} \underbrace{\pi r 2}_{\text{Perimetro}}$$

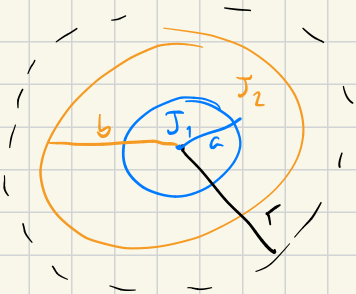
$$B_{(r)} = \frac{\mu_0 V (g_1 a^2 + g_2 (b^2 - a^2))}{2 L}$$

$$\Rightarrow B_{(r)} \begin{cases} \dfrac{\mu g_1 V r}{2L} & r < a \\[2ex] \dfrac{\mu_0 V (g_1 a^2 + g_2 (r^2 - a^2))}{2 L r} & a < r < b \\[2ex] \dfrac{\mu_0 V (g_1 a^2 + g_2 (b^2 - a^2))}{2 L r} & b < r \end{cases}$$

Made with Goodnotes

c)

El campo magnetico fuera del cable sera nulo si es que la corriente neta que pasa por el cable es nula.

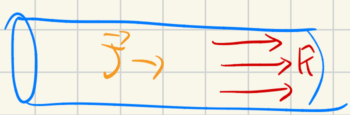


$$\mu_0 I = 0 = \int B_{(r)} \cdot dl$$

$$\Rightarrow B_{(r)} = 0$$

Dado una corriente al interior del cable, la manera en la cual la corriente se anule es que por el exterior corra una corriente superficial talque la corriente total interior es igual e inversa a la corriente total superficial
Para obtener la corrriente total superficial hay que integrar la densidad de corriente superficial en el segmento transversal por donde circula.

$$I_{int} = \vec{J} \cdot Area$$



$$I_{sup} = \vec{K} \cdot Perimetro$$

$$I = I_{int} + I_{sup} = 0 \Rightarrow I_{int} = -I_{sup}$$

$$I_{int} = J_1 \cdot \pi a^2 + J_2 \pi (b^2 - a^2) = K \overbrace{2\pi b}^{\text{Perimetro}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{V(g_1 a^2 + g_2(b^2 - a^2))}{2b} (-\hat{z})$$ sentido contrario a $\vec{J}$.

Forma integral aplicado a un circuito de Faraday-Lenz

$$\boxed{fem_{[Volt]} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}}$$

Φ_m: Flujo magnetico sobre el circuito

Si el flujo es cte. no se induce un potencial.
En nuestro caso:

$$fem = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(B\pi a^2 \operatorname{sen}(\emptyset_0 + wt)\right)$$

$$fem = -B\pi a^2 w \cos(\emptyset_0 + wt)$$

b) Ahora que conocemos el potencial inducido en el circuito (espira) podemos estudiar el comportamiento de la corriente que fluye.
Conocemos la Resistencia equivalente (R) y la autoinductancia (L).

La resistencia nos dice cuanta corriente (I) pasa por un circuito dado un potencial (V)

$$\boxed{I = V/R} \iff \boxed{V = RI}$$

La autoinductancia (L) nos dice cuanto flujo atraviesa el circuito dado una corriente.

$$\Phi_{iato} = LI$$

Si derivamos, nos dice que voltaje inducido se opone al potencial existente dado este flujo

$$\frac{\partial \phi_{auto}}{\partial t} = -fem = L\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Con esto definimos el voltaje, potencial del circuito (V) como la fem inducida por el campo externo B y menos el potencial autoinductivo que se opone.

$$V = fem_{externa} - fem_{auto} = RI$$

$$= fem_{externa} - L\frac{\partial I}{\partial t} = RI$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{I} + R/L\, I = \frac{1}{L} fem_{exc}} \rightarrow EDO$$

* Siempre aparec[e] la misma edo en circuitos inductiv[os]

$$\dot{I} + R/L\, I = \frac{-B\pi a^2 w}{L}\cos(\phi_0 + wt)$$

Para resolver esta EDO sacaremos la solucion homogemea y la particular.

Sol Homogemea de una edo de 1° orden lineal es.

$I_h = A e^{-R/L\, t}$ con a una cte que se obtiene con

Sol Particular de una EDO lineal de 1° orden es simpre de la misma naturaleza que la funcion que hace no homogemea la EDO.

En nuestro caso $1/L\, fem_{ext.}$ es la funcion

Que tiene la forma trigonometricas.

$$I_p = \alpha \, sen(\varnothing_0 + wt) + \beta \cos(\varnothing_0 + wt)$$

con α y β ctes que se sacan reemplazando en la EDO.

Para reemplazarla en la EDO sacamos $\dot{I}_p$

$$\dot{I}_p = \alpha w \cos(\varnothing_0 + wt) + -\beta w \, sen(\varnothing_0 + wt)$$

Reemplazamos I_p en la EDO:

$$\dot{I}_p + R/L \, I_p = \frac{1}{L} f_{em\,ext.}$$

$$\alpha w \cos(\varnothing_0+wt) - \beta w \, sen(\varnothing_0+wt) + R/L \, \alpha \, sen(\varnothing_0+wt) + R/L \, \beta \cos(\varnothing_0+wt) = \frac{-B\pi a^2 w}{L} \cos(\varnothing_0+wt)$$

$$= \underline{(\alpha w + R/L \, \beta)} \cos(\varnothing_0+wt) + \underline{(R/L \, \alpha - \beta w)} sen(\varnothing_0+wt) = \underline{\frac{-B\pi a^2 w}{L}} \cos(\varnothing_0+wt) + \underline{0} \cdot sen()$$

De esta ec se desprenden 2 ec:

$$R/L \, \alpha - \beta w = 0 \quad (1) \quad \wedge \quad \alpha w + R/L \, \beta = \frac{-B\pi a^2 w}{L} \quad (2)$$

De ec. (1) $\Rightarrow \beta = \frac{R}{Lw} \alpha$

De ec. (2) $\Rightarrow L\alpha w + R/L \, w\beta = -B\pi a^2 \Rightarrow \alpha(L + R^2/L \, w) = -B\pi a^2$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{L}{L^2 + R^2 w} (-B\pi a^2)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-R \, B\pi a^2}{L^2 w + R^2 w^2}$$

Con α y β establecidos conseguimos la solucion general de la EDO

~~8~~ Sol general:

$$I_{(t)} = I_h(t) + I_p(t)$$

$$= A e^{-R/L t} + \alpha\, sen(\phi_0 + wt) + \beta \cos(\phi_0 + wt)$$

El ultimo paso es sacar A con C.I.

Del enunciado ~~se~~ extrae que $\phi_0 = \pi/2$ y $I_0 = 0$

$$I_{(0)} = 0$$

$$I_{(0)} = A e^0 + \alpha\, sen(\cancel{\pi/2 + wt}) + \beta \cos(\cancel{\phi_0 + wt})^{\pi/2} = 0$$

$$A + \alpha = 0 \Rightarrow A = -\alpha$$

$$I_{(t)} = -\alpha e^{-R/L t} + \alpha\, sen(\phi_0 + wt) + \beta \cos(\phi_0 + wt)$$

c) El torque se calcula al igual que la fuerza derivando la energía.

$$\vec{T}_{(\theta)} = \frac{dW}{d\theta}\hat{\theta} \quad \text{con } W = \int_{\infty} |B^2|\, dV$$

∞ * en todo el espacio

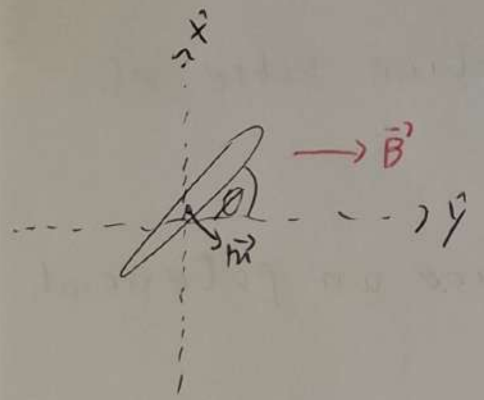
Sin embargo es muy dificil encontrar el $B_{(\vec{r})}$ para todo el espacio.

Por sueste al ser una espira circular, el circuto se puede aproximar adecuadamente a un dipolo magnetico $\vec{m}$.

$$\vec{m} = I \cdot Area \cdot \hat{n} = I_{(t)} \pi a^2 \hat{n}$$

El torque que experimenta un dipolo magnetico frente a un campo $\vec{B}$ externo está dado por la simple ec.

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = I_{(t)} \pi a^2 B \, sen(\phi) \qquad \phi = \phi_0 + wt$$



$$\Rightarrow T_{(t)} = I_{(t)} \pi a^2 B \, sen(\phi) \, (-\hat{z})$$