Electromagnetismo FI2002-5 Primavera 2024
Profesor: Claudio Arenas
Auxiliares: Pablo Guglielmetti, Martín Leiva
Ayudante: Gerd Hartmann

Auxiliar 27: Súper-dúper-hiper-mega aux final

P1: Esfera Wekita
Una esfera dieléctrica de radio R_1 y susceptibilidad eléctrica χ_e, posee una densidad de carga volumétrica desconocida. Al rededor de este se coloca un casquete esférico de radios interior R_1 y exterior R_2, el cual tiene densidad de carga homogénea ρ_0. A pesar de que no se conoce la densidad de carga en la esfera interior, se sabe que el potencial eléctrico en el interior de la esfera de radio R_1 es de la forma

$$V(r) = V_0 \frac{r - R_1}{r}$$

a) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio *Hint:* Trate el problema con principio de superposición.

b) Calcule el potencial eléctrico $V(r)$ en todo el espacio

c) Realice los análisis previos pero para el caso donde el casquete exterior es un conductor. ¿Cuánto valen las densidades de carga inducidas y libres del conductor?

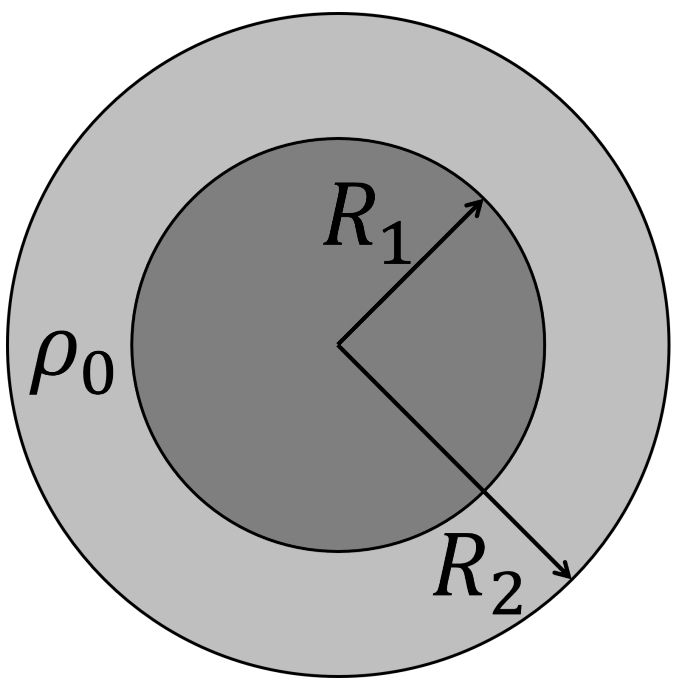

Figura 1: P1

P2:

Un alambre cilíndrico de largo L está formado por dos materiales conductores dispuestos coaxialmente: uno, que constituye el núcleo de radio a, tiene conductividad g_1; el otro, que lo recubre hasta un radio b, tiene conductividad g_2. Los extremos superior e inferior se mantienen a potenciales $V = V_0$ y $V = 0$, respectivamente, determine:

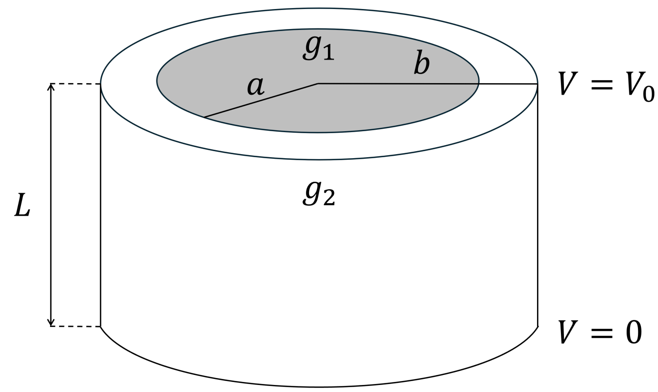

Figura 2: P2

a) La densidad de corriente $\vec{J}$ en el alambre, distinguiendo los casos $\rho < a$ y $a < \rho < b$.

b) Encuentre el campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ en todo el espacio.

c) Encuentre la densidad de corriente K en la superficie exterior del cable para que se anule el campo magnético fuera del cable ($\rho > b$)

P3: Considere una espiraa circular de radio a y largo L que yace sobre el plano xz. En $t = 0$ la espira comienza a girar con una velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$. Si en el espacio existe un campo magnético constante y homogéneo de valor $\vec{B} = B_0 \hat{y}$, determine:

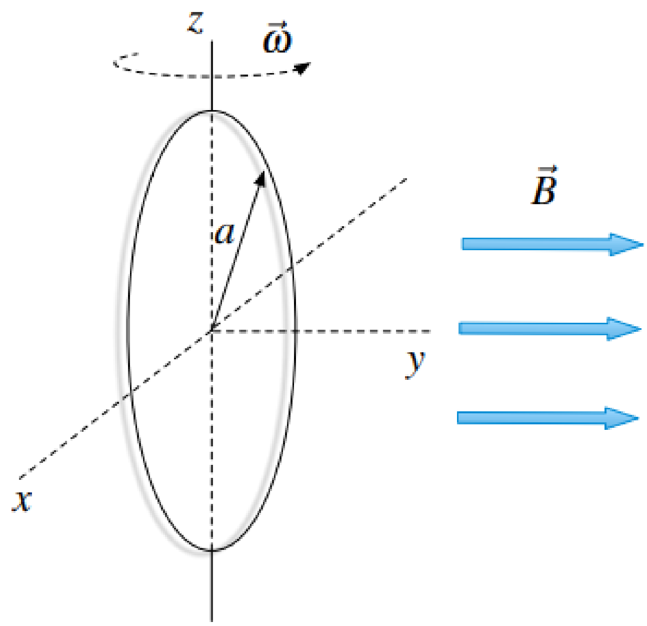

Figura 3: Esquema del problema 3.

a) La fem inducida en la espira.

b) La corriente en función del tiempo que circula por la espira, si posee una resistencia R y una autoinducción L.

c) El torque que siente la espira, suponiendo que ésta ha estado rotando un tiempo muy largo.

Resumen

Teorema de Gauss en electrostática

Para una superficie ∂V cerrada y orientable, y un campo eléctrico $\vec{E}$ bien definido sobre todo el volumen V se tiene que:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

con $\nabla \cdot E$ la divergencia del campo eléctrico.

Cálculo de Potencial

A priori hay dos formas **equivalentes** típicas de calcular el potencial electrostático:

$$\Delta V = V(r) - V(\vec{r}_{ref}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad ; \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{2}$$

Dieléctricos

En materiales dieléctricos (lineales) resulta mucho más útil trabajar con el vector desplazamiento $\vec{D}$, este está definido de la siguiente forma:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

con $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ la permitividad del dieléctrico y $\vec{E}$ el campo eléctrico.

El vector polarización expresa el momento dipolar por unidad de volumen del dieléctrico, puede ser permanente o inducido, pero en dieléctrico lineales se cumple que:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Es importante saber que: $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ y $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$.
Con σ_b la densidad de carga de polarización y ρ_p la densidad de carga de polarización.

Condiciones de Borde

$$E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \sigma/\epsilon_0 \qquad E_2^{\parallel} - E_1^{\parallel} = 0$$

Otra forma de definirlas es por

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n}_{12} = \sigma/\epsilon_0 \qquad \hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

Donde $\hat{n}_{12}$ es la normal que va desde el medio 1 hacia el medio 2.

Corriente

Definimos la corriente I como la carga que pasa por una cierta área por unidad de tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

En ciertos casos es útil definir la densidad de corriente volumétrica $\vec{J}$ de tal forma que

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

Resumen

Con esto se puede deducir que la densidad de corriente volumétrica es

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}$$

Donde $\rho(\vec{r})$ es la densidad de carga y $\vec{v}$ es la velocidad de las partículas cargadas.
Es usual también definir una corriente superficial $\vec{K}$, la cual cumple

$$\int_{\Gamma} (\vec{K} \times \hat{n}) \cdot d\vec{l} = I$$

Donde S es el área transversal y Γ es la curva transversal a la corriente, en este caso

$$\vec{K}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\vec{v}$$

Donde $\sigma(\vec{r})$ es la densidad de carga superficial.

Ley de Ampère

De la ley de Biot-Savart se tiene que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Esta ley tiene el beneficio de que nos permite lidiar con problemas de alta simetría, tal y como pasaba con Gauss. En virtud del teorema de Stokes se tiene que

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

Donde I_{enc} es

$$I_{\text{enc}} = \int\int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Luego, si se tiene alta simetría en el problema, se puede obtener la dirección del campo magnético con la regla de la mano derecha. Así, la integral es fácil de resolver y se despejaría el campo magnético.

Ley de Faraday

Para añadir dinámica a los campos, modificaremos el hecho de que

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Ahora se dirá que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Es decir, el campo eléctrico deja de ser un campo conservativo, por lo que ya no es posible definirse un potencial. Al realizar una integral de superficie a la ley de Faraday y aplicar el teorema de Stokes, se tiene que

$$\vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Donde $\vec{E}$ es la fuerza electromotriz (fem) y Φ es el flujo magnético, los cuales vienen dados por

Resumen

$$\vec{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{y} \quad \Phi = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Debido a que estas relaciones salen de aplicar el teorema de Stokes, se debe de seguir la regla de la mano derecha.

Autoinductancia

De forma idéntica al caso anterior, un circuito se puede autoinducir al tener una corriente variable. La fem autoinducida en ese caso viene dada por

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad \Phi = LI$$

Donde L se le llama la inductancia.

Comportamiento circuital

Desde las leyes de Kirchhoff se puede estudiar el comportamiento de la corriente i que circula por un circuito. Con una resistencia equivalente R, una autoinductancia L y una fem inducida por un campo magnético externo $\mathcal{E}$. Se deriva la edo:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}$$

Fuerza y toques de un dipolo magnético $\vec{m}$ y dado un B uniforme

$$\vec{m} = I\vec{A}$$

- Fuerza: $\vec{F} = 0$
- Torque: $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{\text{ext}}$
- Energía: $W = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$

Leyes de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Ley de Gauss} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Ley de Gauss Magnética}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \text{Ley de Faraday} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$