

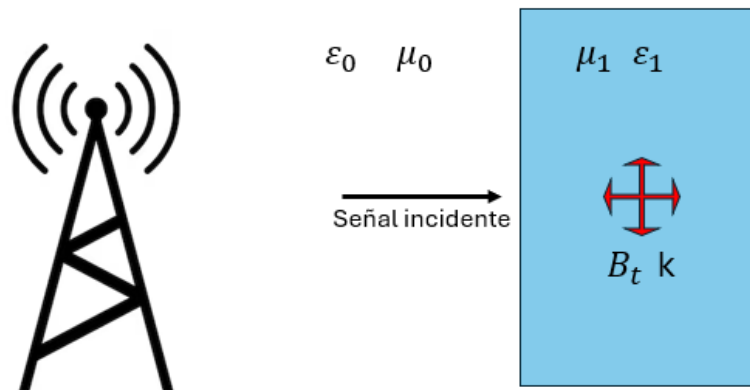
Electromagnetismo FI2002-5 Primavera 2024**Profesor: Claudio Arenas****Auxiliares: Pablo Guglielmetti, Martín Leiva****Ayudante: Gerd Hartmann**

Auxiliar 25: Ondas en medios matereales.

P1. Imagine un detector de señales electromagneticas que se encuentra dentro de un cristal con permitividad y permeabilidad conocidas (ϵ_1, μ_1) y conductividad nula. El detector al exponerse a una onda electromagneticica mide su numero de onda k y la maxima magnitud del campo magnetico dentro del cristal. Una señal esta incidiendo en el cristal normal a la interfaz. Con los resultados del detector y considerando la onda como

$$\mathbf{B} = \tilde{B}_t e^{i(kz - \omega t)} \hat{i}$$

- a) Encuentre la frecuencia ω de la señal.
- b) Los campos electricos y magneticos tanto en el aire como en el cristal.
- c) Comente sobre la capacidad de deteccion basado en los coeficientes de reflexión y transmisión



Resumen

Leyes de Maxwell

- Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Ley de Gauss Magnética:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Ley de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Leyes de Maxwell en Medios Materiales

- Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l$$

- Ley de Gauss Magnética:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Ley de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Ondas Electromagnéticas

Al tomar el rotor en la ley de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell y aplicar la siguiente identidad vectorial (Ver Aux 1):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

Se llega a que las ecuaciones para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el vacío son:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Con $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$. Las ecuaciones antes mostradas son ecuaciones de onda, donde c representa la velocidad de una onda electromagnética, o simplemente la velocidad de la luz. La solución más típica a esas ecuaciones son de tipo sinusoidal, las cuales escribiremos con una exponencial imaginaria para más conveniencia:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)}$$

Resumen

Donde $\mathbf{k}$ es el número de onda.

Condiciones de Borde:

$$E_1^t = E_2^t$$
$$\frac{B_1^t}{\mu_1} = \frac{B_2^t}{\mu_2}$$

Algo que es posible demostrar es que las ondas electromagnéticas están siempre en fase y además cumplen que $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. En concreto,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \mathbf{E}$$

Para problemas de reflexión y transmisión, se definen los coeficientes R y T de la forma:

$$R = \frac{I_r}{I_i}, \quad T = \frac{I_t}{I_i}$$

Donde I es la intensidad de la onda electromagnética, la cual se calcula como:

$$I = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2$$

Resumen: Las ec. de Maxwell nos explican todos los fenomenos electromagneticos.

$$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon \quad (\Rightarrow) \quad E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{d\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \text{No existen los monopolos magneticos.}$$

$$\nabla \times B = \mu J + \mu \frac{dD}{dt} \quad (\Rightarrow) \quad B(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} + \text{Corriente de des.}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \text{Induccion electromagnetica}$$

Asumiendo $J=0$ y $\rho=0$ de estas ecuaciones se deriva la ec. de onda:

$$\nabla^2 E + \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \wedge \quad \nabla^2 B + \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

Al ser la misma ec de onda para B y E, interpretamos que se propagan juntos.

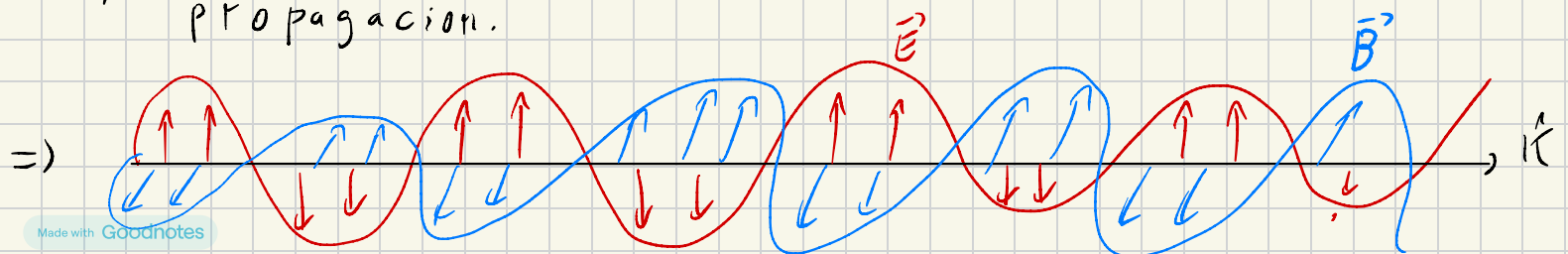
Ademas de las ecuaciones de Maxwell se deriva

Sea $\hat{k}$ la direccion de propagacion:

$$\underbrace{\vec{E} \cdot \hat{k} = 0 \quad \wedge \quad \vec{B} \cdot \hat{k} = 0}_{\text{No existe componente de } \vec{E} \text{ y } \vec{B} \text{ en la direccion de propagacion.}} \quad \wedge \quad \underbrace{\vec{E} = v \vec{B} \times \hat{k} \quad \wedge \quad \vec{B} = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}}_{\vec{E} \text{ y } \vec{B} \text{ son perpendiculares.}}$$

No existe componente de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en la direccion de propagacion.

$\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.



Esta onda se modela con la expresión que cumple la EDO:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{B} = B_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$= E_0 (\cos(kz - \omega t) + i \sin(kz - \omega t)) \hat{x} = B_0 (\cos(kz - \omega t) + i \sin(kz - \omega t)) \hat{y}$$

Trabajamos con exponenciales para facilitar los cálculos.
La parte imaginaria se puede despreciar.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: Representa el factor de cambio de la onda según la posición.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: frecuencia angular. Siempre se mantiene al cambiar de medio.

$$\omega/k = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \lambda/T = v = \text{velocidad de propagación}$$

$$v = \omega/k = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad \text{Por la cte en la EDO.}$$

De $\vec{E} = v \vec{B} \times \hat{k}$ extraemos $E_0 = v B_0$ Una relación entre las magnitudes de B y E .

Con las siguientes ec. trabajaremos para conocer la totalidad del comportamiento de la onda EM en medios lineales no conductores:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad \vec{B} = B_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}$$

$$E_0 = v B_0$$

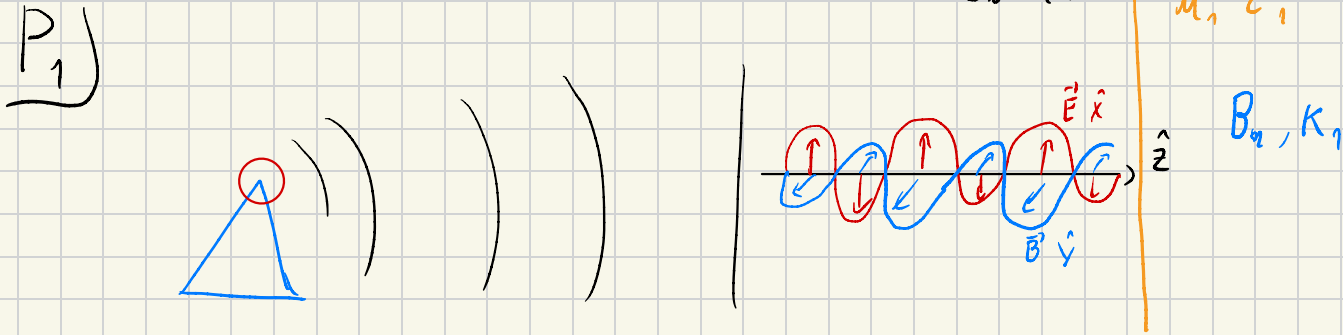
$$v = \omega/k = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Y las condiciones de Borde al pasar de un medio 1 a un medio 2:

$$\vec{E}_1^t = \vec{E}_2^t$$

t de tangente a la interfaz.

$$\frac{B_1^t}{\mu_1} = \frac{B_2^t}{\mu_2}$$



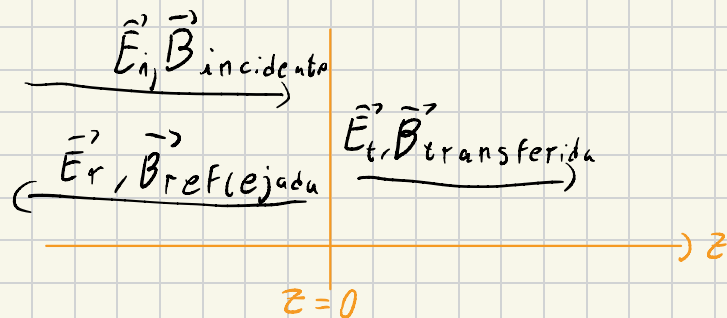
Gracias al detector conocemos el $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ de la onda dentro del cristal. Además al conocer μ_1 y ϵ_1

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{w}{k_1} \Rightarrow w = \frac{k_1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{k_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \rightarrow v_{\text{en el aire}}$$

$$\Rightarrow k_0 = k_1 \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Así conocemos w que es cte independiente el medio y también k_0 .

b. Se nos presenta un escenario con 3 ondas con magnitud desconocidas, tanto para $\vec{E}'$ como para $\vec{B}'$



Estos campos tienen una forma conocida:

$$\vec{E}_i = E_i e^{i(k_0 z - wt)} \hat{x}, \quad \vec{B}_i = B_i e^{i(k_0 z - wt)} \hat{y}, \quad E_i = v_0 B_i$$

$$\vec{E}_r = E_r e^{i(-k_0 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\vec{B}_r = B_r e^{i(-k_0 z - \omega t)}$$

$$B_r = -\frac{1}{v} E_r$$

* El signo menos en $e^{i(-k_0 z - \omega t)}$ es porque la onda se propaga hacia $-\hat{z}$.
 (pt la velocidad es hacia $-\hat{z}$)

$$\vec{E}_t = E_t e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\vec{B}_t = B_t e^{i(k_1 z - \omega t)}$$

$$E_t = v_1 B_t$$

Como ya sabemos k_0, k_1, v_1, v_0 y ω solo nos falta conocer las magnitudes de los campos para conocer la totalidad del comportamiento de la onda.

Gracias al Detector conocemos la magnitud B_t

$$\Rightarrow E_t = v_1 B_t = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} B_t$$

Ahora usamos condiciones de borde:

$$\left. \begin{aligned} E_i &= E_t \Rightarrow E_i + E_r = E_t \\ \frac{B_i}{\mu_1} &= \frac{B_t}{\mu_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} (B_i + B_r) = \frac{1}{\mu_1} B_t \quad (1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Esto pues al ser la direc.} \\ \text{de propagacion normal a} \\ \text{la interfaz, los campos } \vec{B} \text{ y } \vec{E} \\ \text{son tangentes a la interfaz} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} E_i &= v_0 B_i \\ E_r &= -v_0 B_r \\ E_t &= v_1 B_t \end{aligned} \right\} v_0 (B_i - B_r) = v_1 B_t \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_0} (B_i + B_r) = B_t = \frac{v_0}{v_1} (B_i - B_r)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_1 v_1}{\mu_0 v_0} (B_i + B_r) = B_i - B_r \quad \text{sea } \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_0 v_0}$$

$$\Rightarrow (1 + \beta) B_r = (1 - \beta) B_i$$

$$\Rightarrow B_r = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} B_i$$

$$1 + \beta = \frac{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1}{\mu_0 v_0}$$

$$1 - \beta = \frac{\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1}{\mu_0 v_0}$$

$$\Rightarrow B_t = \frac{\mu_1}{\mu_0} (B_r + B_i) = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left(\frac{2}{1 + \beta} \right) B_i = B_t$$

$$\Rightarrow B_i = \frac{\mu_0}{\mu_1} \left(\frac{1 + \beta}{2} \right) B_t = \frac{\mu_0}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1}{2 \mu_0 v_0} B_t = \frac{\mu_0 v_0 + v_1 \mu_1}{2 \mu_1 v_0} B_t$$

$$\Rightarrow B_r = \frac{\mu_0}{\mu_1} \left(\frac{1 - \beta}{2} \right) B_t = \frac{\mu_0}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1}{2 \mu_0 v_0} B_t = \frac{\mu_0 v_0 - v_1 \mu_1}{2 \mu_1 v_0} B_t$$

$$\Rightarrow E_i = \frac{\mu_0 v_0 + v_1 \mu_1}{2 \mu_1} B_t$$

$$E_r = \frac{\mu_0 v_0 - v_1 \mu_1}{2 \mu_1} B_t$$

$$E_t = v_1 B_t$$

Con esto tenemos toda la información de los campos.

c) Para obtener los coef. de Reflexión y Transmisión estadiaremos la potencia media de cada onda

$$\text{Potencia media} = \langle |S| \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v |E|^2 = I$$

↗
solo a magnitud
cte. en medios
no conductores

$$I_{\text{incidente}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} E_i^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1}{2 \mu_1} B_t \right)^2$$

$$I_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_r^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1}{2 \mu_1} B_e \right)^2$$

$$I_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_t^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (v_1 B_d)^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{B_e^2}{\epsilon_1 \mu_1} = \frac{1}{2 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} B_e^2$$

Coef:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1}{2 \mu_1} B_e \right)^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1}{2 \mu_1} B_e \right)^2} = \frac{(\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1)^2}{(\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1)^2}$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\frac{1}{2 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} B_e^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1}{2 \mu_1} B_e \right)^2} = \frac{v_1^2}{(\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1)^2}$$

Segun los valores de μ_0 , ϵ_0 , μ_1 , ϵ_1 la energia de la onda incidente se reflejara mas o se transmitira mas y llegara al detector.

Idealmente que mas energia llegue al detector, por lo que buscamos T grande.