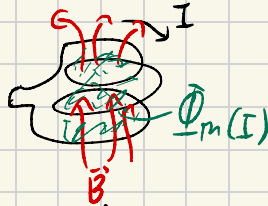
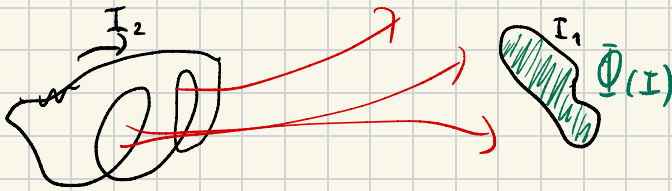


La inductancia propia L se define como el flujo magnético que experimenta el propio circuito por una corriente específica que corre por ese circuito

$$L = \frac{\Phi(I)}{I}$$



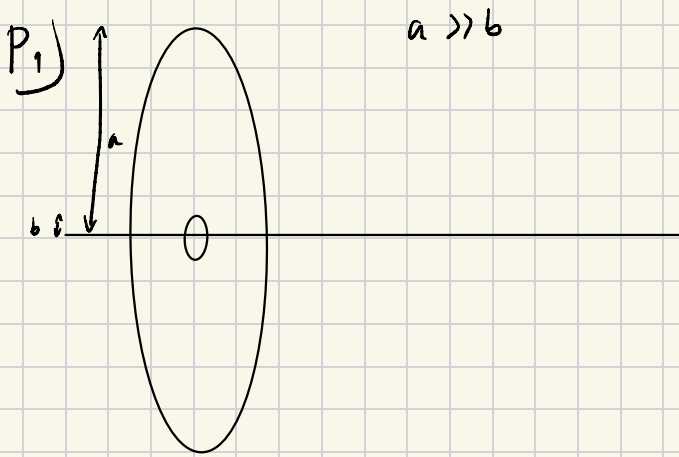
La inductancia mutua se define como el Flujo magnético que experimenta un circuito debido a una corriente que circula por otro circuito.



Con esto tenemos $\Phi_1 = L I_1 + M I_2$

Con esto la FEM inducida que experimentara estará dado por las variaciones de I_1 y I_2

$$FEM = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \dot{I}_1 - M \dot{I}_2$$

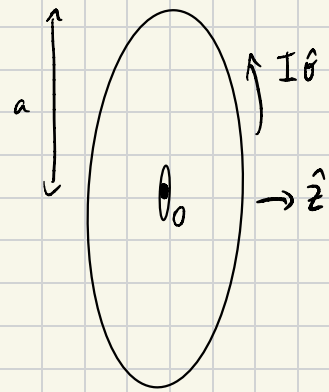


Un resultado teorico nos dice que la inductancia que siente un circuito A por una corriente en un circuito B es la misma que siente B por la corriente en A.

$$M_{ab} = M_{ba}$$

Con esto podemos elegir a que circuito imponerle una corriente y por consiguiente calcularle el flujo al otro. Se debe elegir de forma que se simplifiquen los calculos.

En este caso al ser $b \ll a$ podemos aproximar el campo en toda el area πb^2 al campo en el eje z. Por eso es mas facil calcular M imponiendo corriente en la espira grande y calculando el flujo en la espira chica. De la otra manera seria muy engorroso.



$$\begin{aligned}
 \vec{B}(0) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a I d\theta \hat{\theta} \times (-a\hat{r})}{a^3} \\
 &= \frac{\mu a^2 I}{4\pi a^3} \int_0^{2\pi} \hat{\theta} \times (-\hat{r}) d\theta \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \hat{z} d\theta \\
 &= \frac{\mu I 2\pi \hat{z}}{4\pi a} = \frac{\mu I}{2a} \hat{z}
 \end{aligned}$$

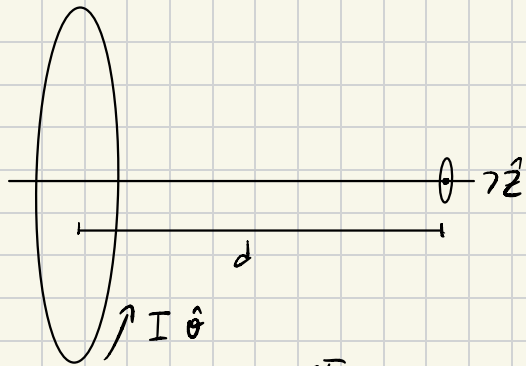
Aproximando el campo en $r \leq b$ como uniforme de valor $\vec{B}(r) = \frac{\mu I}{2a} \hat{z} \quad \forall r \leq b$

$$\Rightarrow \Phi = \int \vec{B}(r) \cdot d\vec{S} = B(r) \cdot \text{Area} = \frac{\mu I \pi b^2}{2a}$$

$$\mu = \frac{\Phi(I)}{I} = \frac{\mu I \pi b^2}{2a I} = \frac{\mu \pi b^2}{2a}$$

b) Para el caso en que las espiras están separadas en el eje z

Usaremos la misma aproximación.



$$\vec{B}(d\hat{z}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\sigma \hat{\theta} \times (d\hat{z} - a\hat{r})}{(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu I a}{4\pi (d^2 + a^2)^{3/2}} \int (\hat{\theta} \times d\hat{z} - \hat{\theta} \times a\hat{r}) d\sigma$$

$$= \frac{\mu I a}{4\pi (d^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (d\hat{r} + a\hat{z}) d\sigma$$

$\int_0^{2\pi} \hat{x} \cos(\sigma) + \hat{y} \sin(\sigma) d\sigma = 0$

$$= \frac{\mu I a a \hat{z}}{4\pi (d^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\sigma =$$

$$\vec{B}(d\hat{z}) = \frac{\mu I a^2 2\pi}{4\pi (d^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

aproximamos el campo
en $r \ll a$ es o

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I a^2}{2 (d^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \text{en } \vec{r} = d\hat{z} + r\hat{r} \quad \text{con } r \ll a$$

Así el flujo es: $\Phi = \int \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$

$$\Phi = B \cdot \text{Area} = \frac{\mu I a^2 b^2 \pi}{2 (a^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$M = \frac{\Phi(I)}{I} = \frac{\mu a^2 b^2 \pi}{2 (a^2 + d^2)^{3/2}}$$

c) si los planos que contienen las espiras estuvieran inclinadas entre si, al momento de calcular el



flujo en b por el campo $B(z)$ dedemos considerar el angulo

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \vec{B} \cdot \hat{n} ds$$

$$= B \cos(\theta) \int ds$$

$$= B \cdot \text{Area} \cos(\theta)$$

$$= B_z \pi b^2 \cos(\theta)$$

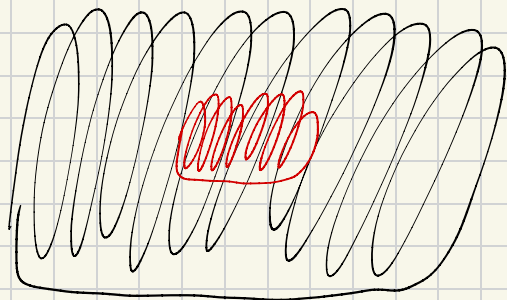
Por esto en el caso de las espiras en $z=0$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu I \pi b^2 \cos(\theta)}{2a I} = \frac{\mu \pi b^2 \cos(\theta)}{2a}$$

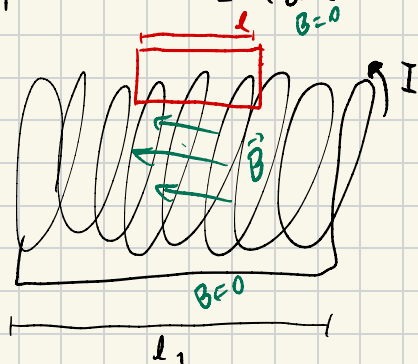
Analogamente en el caso de espiras distanciadas

$$M = \frac{\mu a^2 b^2 \pi}{2 (a^2 + d^2)^{3/2}} \cos(\theta)$$

P₂)



Calculemos primero las inductancias propias de las bobinas



Imponemos una corriente I y calculamos el flujo resultante

Numero de vueltas $= N = l \cdot m_1$

Usando la ley de Ampere con una curva cerrada rectangular calculamos el campo dentro de la bobina que la aproximamos a cte.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$$

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = B \cdot l$$

$$\mu I = \mu I \cdot N = \mu I m_1 l$$

$$\vec{B} \cdot \vec{l} = \mu I m_1 l$$

$\Rightarrow \vec{B} = \mu I m_1 \hat{n}$ en direccion normal a la superficie que encierra las espiras

$$\Phi_{(B(I))} = \sum^N \Phi_i = N_{total} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

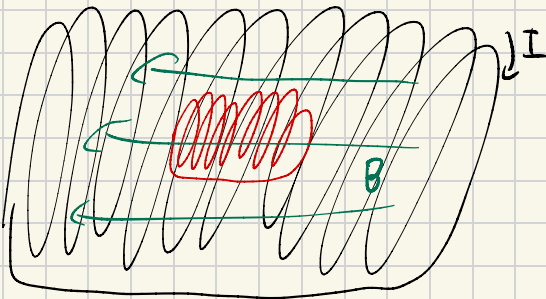
$$= m_1 l_1 \cdot B \cdot Area$$

$$L_1 = \frac{\Phi_{(I)}}{I} = m_1^2 l_1 \mu I \pi r_1^2$$

Analogamente:

$$L_2 = m_2^2 l_2 \mu \pi r_2^2$$

Para la inductancia mutua sera mas sencillo imponer una corriente en la bobina grande. Esta producira un campo uniforme (aprox) sobre la bobina de dentro, por lo que sera facil calcular el flujo.



Como ya calculamos el campo dentro de la bobina es

$$\vec{B} = \mu I m_1 \hat{n}$$

Así el flujo en la bobina pequeña
será:

$$\Phi_{\text{total}} = \sum^N \Phi_i = N_{\text{total}} \Phi_{\text{espira}}$$

$$= l_2 m_2 \int \vec{B} \cdot d\vec{S}'$$

$$= l_2 m_2 \pi r_2^2 B$$

$$= l_2 m_2 \pi r_2^2 \mu I_1 m_1$$

$$M = \frac{\Phi_{(I)}}{I_1} = \frac{l_2 m_2 m_1 \mu I \pi}{I}$$

$$\Rightarrow M = \mu \pi l_2 m_1 m_2 r_2^2$$