Electromagnetismo FI2002-5 Primavera 2024
Profesor: Claudio Arenas
Auxiliares: Martín Leiva, Pablo Guglielmetti

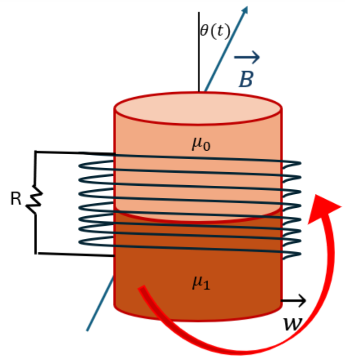
Trabajo Dirigido 2

P1.
Considere una bobina de N espiras. La mitad de estas rodean un nucleo de de permeabilidad μ_0, y la otra mitad un nucleo de permeabilidad μ_1. La resistencia equivalente del circuito es igual a R. Ademas existe un campo magnetico $\vec{B_0}$ uniforme en todo el espacio. Suponga que el circuito esta rotando con velocidad angular $\vec{w} = \frac{d\theta}{dt}$, con $\theta(t)$ el angulo entre el eje de simetría de la bobina y el campo $\vec{B_0}$.

a) Encuentre el flujo magnetico a travez del tiempo en la bobina producido por el campo $\vec{B_0}$.

b) Encuentre la auto inductancia L del circuito.

c) Encuentre la corriente en funcion del tiempo que corre por la bobina. Considere que en t_0 la bobina esta alineada con el $\vec{B_0}$ y la corriente es nula.



P2. Lorentz goes brr brr 🗣🗣🗣

Queremos estudiar el movimiento de una partícula de masa m y carga q bajo el efecto del campo magnético generado por un cable infinitamente largo y recto de corriente uniforme I.

a) Encuentre el campo magnético que genera el cable.

b) Encuentre la ecuación de movimiento para la partícula en coordenadas cilíndricas.

c) Asumiendo que $\dot{z} = 0$ en todo momento, describa el movimiento de la partícula.

Hint: La velocidad y aceleración en cilíndricas son

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}, \qquad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

Resumen

Ley de Biot-Savart
Para una distribución de corriente lineal $\vec{I}$ se tiene que el campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{||\vec{r} - \vec{r'}||^3}$$

Ley de Ampère
El campo magnético también puede ser calculado al aplicar el teorema de Stokes a la ley de Maxwell para $\nabla \times \vec{B}$ obteniéndose así la ley de Ampère:

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

Donde μ_0 es la permeabilidad del vacío, $\vec{B}$ es el campo magnético y S es una superficie definida por un camino cerrado que encierra a la densidad de corriente $\vec{J}$

Potencial Vector Magnético
Para una distribución de corriente $\vec{J}$ definimos el potencial vector magnético $\vec{A}$ como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{||\vec{r} - \vec{r'}||} dV$$

El campo magnético se puede calcular en función de $\vec{A}$ como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}$$

Inducción Electromagnética
La relación entre los campos eléctrico y magnético fue descrita inicialmente de forma cualitativa por Faraday y Lenz a través del principio de inducción, que a grandes rasgos nos dice que ¨La corriente se opone a cambios del flujo de campo magnético en el tiempo y viceversa¨.

Flujo Magnético

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Ley de Faraday
Como dijimos, variaciones del flujo generan variaciones de la corriente, esta variación de la corriente es descrita por una fem inducida ε, esta está dada por la siguiente expresión:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

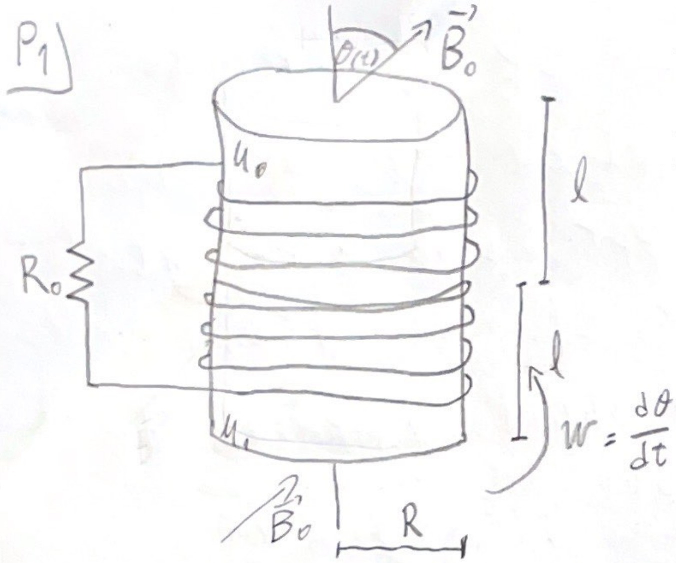
Autoinductancia (L)
Un circuito se puede auto inducir corriente al tener una corriente variable, la fem autoinducida en ese caso viene dada por:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \qquad \Phi = LI$$

EDO circuito RL

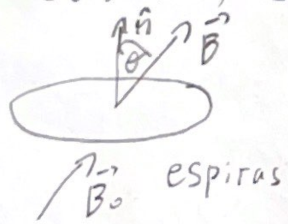
$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon_{ext} = -\frac{d\Phi}{dt}$ La derivada del flujo magnetico no considerar los efectos autoinductivos.

P1)



El $\vec{B}_0$ es uniforme y cte.
El circuito rota de manera que $w = \frac{d\theta}{dt}$ cte $\Leftrightarrow \theta(t) = \theta_0 + wt$
θ = angulo que forma el campo $\vec{B}$ y el eje de Simetría de la bobina.

a) Para calcular el flujo que genera el $\vec{B}_0$ en la bobina, sumamos los flujos de las N espiras.



$$\Phi_i = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS =$$

Al ser el $\vec{B}_0 \cdot \hat{n}$ uniforme en la superficie sale de la integral

$$\Phi_i = \underbrace{\vec{B}_0 \cdot \hat{n}}_{B_0 \cos(\theta)} \underbrace{\iint dS}_{\text{Area}} = B_0 \cos(\theta(t)) \cdot \pi R^2$$

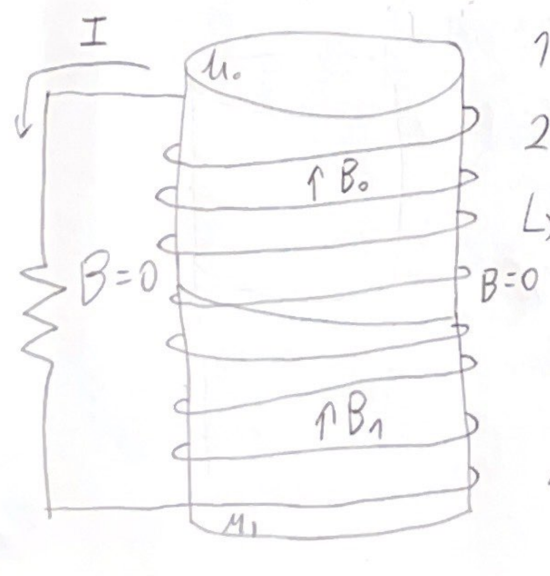
$$\Phi_{total} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = N B_0 \pi R^2 \cos(\theta(t))$$

$$\Phi_{total}(t) = N B_0 \pi R^2 \cos(\theta_0 + wt)$$

b) La autoinductancia L se entiende como el flujo magnetico en un circuito producido por una corriente unitaria que corre por el circuito. Esta es constante y solo depende de las caracteristicas del circuito. NO DEPENDE DE CAMPOS EXTERNOS.

$$L = \frac{\Phi_{\text{Autoinducido}}(I)}{I_{\text{arbitrario}}}$$

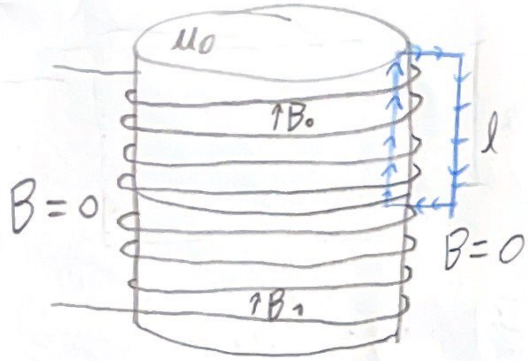
Para calcular L debemos imponer una corriente arbitraria I en el circuito y calcular el flujo magnetico en el circuito producido por I. Se ignoran condiciones externas al circuito.



1. Imponemos I por el circuito
2. Calculamos el $\vec{B}$ que produce I

↳ Ignorando los efectos de borde tenemos un campo $\vec{B}$ nulo fuera de la Bobina y uniforme dentro, alineado con el eje.

Por esta simetría usamos Ley de Ampere para calcular el campo



Para la zona μ_0:

Usamos de curva cerrada un rectangulo con un lado de largo (l) dentro de la bobina y el otro fuera

La superficie esta siendo atravesada por $N/2$ cables con corriente I.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{total} = \iint \mu \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 \cdot l$ el lado es paralelo al $\vec{B_0}$ y los demas lados integral de linea nulos.

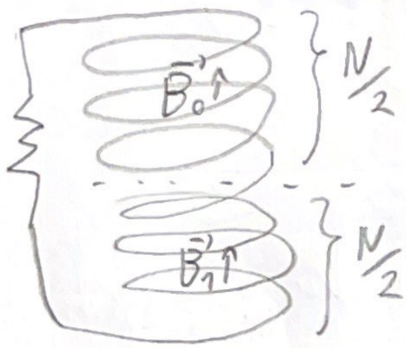
$\mu I = \frac{\mu_0 I N}{2}$ pues $I_{total} = I \cdot N°$ de cables

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I N}{2l} \hat{z}$$

Analogo:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_1 I N}{2l} \hat{z}$$

3. Calculas el flujo que atraviesa el circuito debido al campo $\vec{B}(I)$ recien calculado



Para calcular el flujo en el circuito sumamos los flujos de cada espira.

$N/2$ espiras son atravesadas por un campo uniforme $B_0\hat{z}$ y otras $N/2$ por B_1

$$\Phi_i = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \oint dS = B \cdot Area = \begin{cases} B_0 \pi R^2 & \text{en } \mu = \mu_0 \\ B_1 \pi R^2 & \text{en } \mu = \mu_1 \end{cases}$$

$$\underset{\text{Auto inducida}}{\Phi_{total}} = \sum^{N/2} \Phi_{\mu_0} + \sum^{N/2} \Phi_{\mu_1}$$

$$= \frac{N}{2}\left(\frac{\mu_0 I N \pi R^2}{2l}\right) + \frac{N}{2}\left(\frac{\mu_1 I N \pi R^2}{2l}\right)$$

$$\underset{\text{Autoi.}}{\Phi_{total}} = \frac{N^2 I \pi R^2(\mu_0 + \mu_1)}{2l}$$

4. Para encontrar L usamos $L = \dfrac{\Phi_{autoinducida}}{I}$

$$L = \frac{N^2 I \pi R^2(\mu_0 + \mu_1)}{2 l I} = \frac{N^2 \pi R^2(\mu_1 + \mu_0)}{2l}$$

c. La FEM inducida en el circuito sera disidada totalmente por la resistencia R_o (Ley de Kirkof)

$$FEM = RI = FEM_{B_o} + FEM_{autoinductivo}$$

La $FEM_{B_o} = \frac{-d\Phi_{B_o}}{dt}$ Faraday-Lenz

$$= \frac{d}{dt}\left(-NB_o\pi R^2\cos(\theta_o+wt)\right)$$

$$= NB_o\pi R^2 w\,\mathrm{sen}(\theta_o+wt)$$

$$\Phi_{auto\,inducida} = L\cdot I$$

$$\Rightarrow FEM_{A.I.} = \frac{-d\Phi_{A.I}}{dt} = -L\cdot\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{-d\Phi_{B_o}}{dt} = L\dot{I} + R_oI \rightarrow \text{EDO de circuito RL}$$

$$\frac{N^2\pi R^2(\mu_o+\mu_o)}{2l}\dot{I} + R_oI = NB_o\pi R^2 w\,\mathrm{sen}(\theta_o+wt)$$

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{2lR_o}{N^2\pi R^2(\mu_o+\mu_1)}I = \frac{B_o w 2l}{N(\mu_o+\mu_1)}\mathrm{sen}(wt) \quad \theta_o = 0$$

$$I(t) = Ae^{-t/A} + B\cos(wt) + C\,\mathrm{sen}(wt)$$

Propuesto encontrar A, B y C con $I_o = 0$, $\dot{I} = 0$