Electromagnetismo FI2002-5 Primavera 2024
Profesor: Claudio Arenas
Auxiliares: Pablo Guglielmetti, Martín Leiva
Ayudante: Gerd Hartmann

Auxiliar 19: Magnetoestática en medios materiales

P1.
Considere un cilindro conductor de largo L y radio R. Este cuenta con conductividad σ constante y permeabilidad magnética μ tal que:

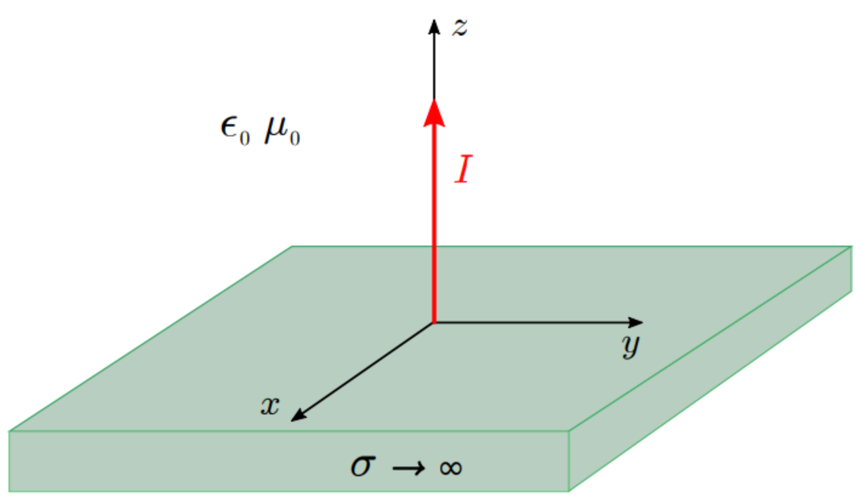
$$\mu(r) = \mu_0 \left(\frac{R}{r + \epsilon} \right)$$
$$\text{con } 0 < \epsilon \ll R$$

Además, se encuentra conectado a un circuito, de tal manera que existe una diferencia de potencial V_0 entre sus extremos. Suponiendo que la corriente es homogénea en su interior, calcule los campos $\vec{H}$, $\vec{B}$ y el vector magnetización $\vec{M}$ dentro del cilindro.
Encuentre los espacios donde el material se concidera diamagnético, paramagnetico y ferromagnetico.

P2.
Un conductor de largo semi-infinito, que lleva una corriente I, se ubica perpendicular a un plano perfectamente conductor conectado a tierra en $z = 0$.

a) Calcule el campo magnético, en magnitud y dirección, sobre el plano conductor ($z > 0$).

b) Determine la magnitud y dirección de la corriente en la superficie del plano conductor.



Resumen

Magnetización

Definimos la magnetización de un material $\vec{M}$ como

$$\vec{M}\,dV = d\vec{m}$$

Campo $\vec{H}$ (Intensidad Magnética)

El vector de intensidad magnética $\vec{H}$ se define como:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} - \vec{M})$$

La ley de Ampère, que relaciona el campo magnético y la corriente, se presenta en dos formas:

- **Forma diferencial**:
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$
- **Forma integral**:
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

Medios Lineales

En materiales lineales, la magnetización es proporcional a la intensidad magnética:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

De aquí se deduce:
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

donde $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ es la permeabilidad del material.

Condiciones de Borde

Las condiciones en la interfaz entre dos medios magnéticos son:

- **Continua de $\vec{B}$**:
$$B_\perp^2 = B_\perp^1$$
- **Discontinuidad de $\vec{H}$**:
$$H_\parallel^2 - H_\parallel^1 = \vec{K}_l$$

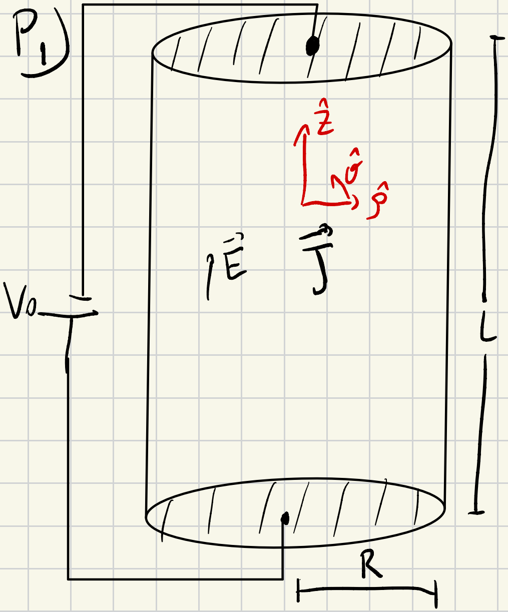
Esto puede expresarse también como:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0$$

$$\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_l$$

donde $\hat{n}_{12}$ es la normal que apunta desde el medio 1 hacia el medio 2.

P_1)



Dado a que la corriente es homogenea

$\vec{J}/\sigma = \vec{E}$ es homogenea y en la direccion $\hat{z}$

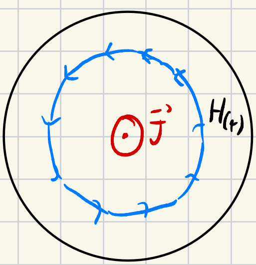
Sabemos que

$$V_0 = \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{z} = E \cdot L$$

$\Rightarrow \vec{E} = V_0/L \, \hat{z}$ al interior del cilindro

$$\Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma V_0}{L} \hat{z}$$

Primero calcularemos $\vec{H}$ pues no depende de μ



Sabemos que el campo magnetico tiene direccion $\hat{\theta}$ con respecto a la corriente

Apliquemos Ampere: $\oint H(r) = \iint \vec{J} \cdot dA$

$$\Rightarrow H(r) \cdot 2\pi r = J \pi r^2 =$$

$$\Rightarrow H(r) = \frac{Jr}{2} \hat{\theta} \quad \forall r < R$$

La dirección la sabemos por ley de la mano derecha.

Para obtener $\vec{B}$ simplemente multiplicamos por la permeabilidad magnetica. μ.

$$\vec{B}_{(r)} = \mu_{(r)} \vec{H}_{(r)} = \mu_0 \left(\frac{R}{r+\varepsilon}\right) \frac{Jr}{2} \hat{\theta}$$

Y luego el vector magnetizacion $\vec{M}$ usamos

$$B/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}$$

$$= \frac{R}{r+\varepsilon} \frac{Jr}{2} \hat{\theta} - \frac{Jr}{2} \hat{\theta}$$

$$= \frac{Jr}{2} \left(\frac{R}{r+\varepsilon} - 1\right) \hat{\theta}$$

Notemos que para $R > r > R-\varepsilon$, $\left(\frac{R}{r+\varepsilon} - 1\right) < 0$ por lo que $\vec{M}$ va en la direcion $-\hat{\theta}$ y se opone a $\vec{B}$ y $\vec{H}$. Y se tiene $\vec{B} < \vec{H}\mu_0$.

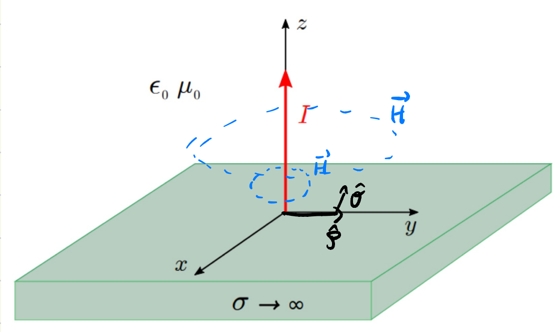
Es en esta region donde el material se demomina diamagnetico.

Tambien notemos que en $r \ll R$ el $\vec{M}$ se dispara pues ε es una magnitud muy pequeña $\left(\frac{R}{r+\varepsilon} - 1\right) \gg 1 \Rightarrow \vec{M} \gg \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \gg \vec{H}\mu_0$

En esta region el material se denomina Ferromagnetico.

$$\text{Espacio}\begin{cases}\text{Ferromagnético} & 0<r\ll R\\ \text{Paramagnético} & r<R-\varepsilon\\ \text{Diamagnetico} & R>r>R-\varepsilon\\ \text{Vacio} & r>R\end{cases}$$

P2)



Vemos que solo hay corriente en el hilo conductor. Y se puede considerar en estado estacionario.

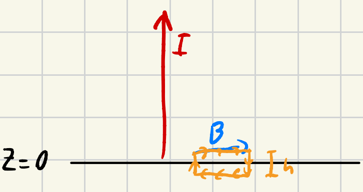
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, tomemos una circunferencia cerrada con centro en $\rho = 0$ para usar ley de Ampere.

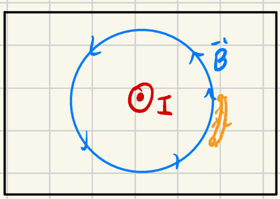
$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r)\, r\, d\theta = B(r)\, r\, 2\pi$$

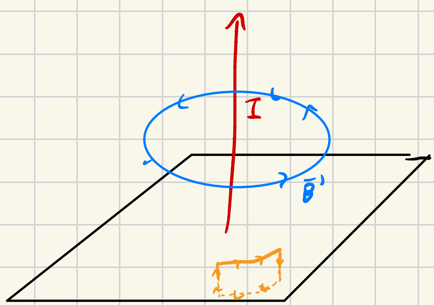
$$B(r)\, r\, 2\pi = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\theta} \quad \text{"mano derecha"} \quad \forall z > 0$$

b) Se considera que cuando $\sigma \to \infty$ el campo $\vec{B}$ es nulo

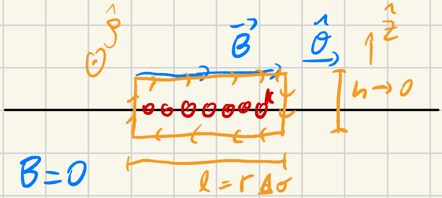






$\sigma \to \infty \Rightarrow \vec{B} = 0$

Si aplicamos ley de Ampere con un rectángulo curvado de manera que un lado vaya tangente al $\vec{B}$ en $z>0$. Mientras que el lado paralelo a ese queda en $z<0$. Además los lados normales al plano $z=0$ son de longitud despreciable.



$$H_t^1 - H_t^2 = K \Rightarrow B_t^1 - B_t^2 = K\mu_0$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r)\, r\,\Delta\theta + \int \cancel{B_n\, dz}^{\,0} - \int \cancel{B_n\, dz}^{\,0} + \int \cancel{0\, dl}^{\,0}$$

$$= B(r)\, r\,\Delta\theta = I\mu_0$$ al ser $h \to 0$ decimos que la corriente es superficial

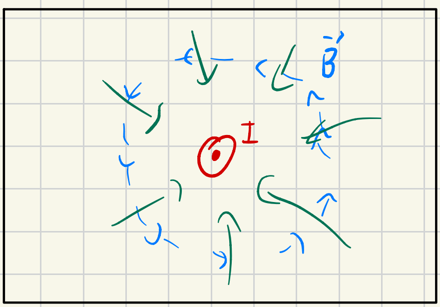
$$I\mu_0 = K\cdot l\cdot \mu_0 = K_r\, r\cdot\Delta\theta\,\mu_0$$

$$B(r)(\overbrace{r\Delta\theta}^{l}) = K_r\,\mu_0\,(r\Delta\theta)$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = K_r\,\mu_0$$

$$\Rightarrow K_r = \frac{-I}{2\pi r}\hat{\rho}$$

la direccion nos la da la curva cerrada de Ampere.



Notemos que el total de carga que llega al centro es

$$K\cdot l = K\cdot 2\pi r = \frac{I}{2\pi r}\cdot 2\pi r = I.$$