Made with Goodnotes

Made with Goodnotes

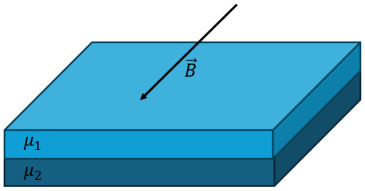
Electromagnetismo FI2002-5 Primavera 2024
Profesor: Claudio Arenas
Auxiliares: Pablo Guglielmetti, Martín Leiva
Ayudante: Gerd Hartmann

Auxiliar 18: Intensidad de Campo Magnetico

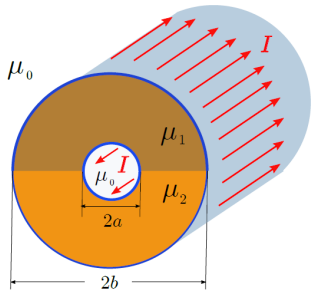
P1.
Considere dos placas delgadas pegadas como se ve en la figura. Estas estan dentro de un solenoide que genera un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y conocido. Una de las placas es paramagnetico con permeabilidad magnetica $\mu_1 < \mu_0$. Y la otra placa es diamagnetica con $\mu_2 > \mu_0$. Calcule:

a Campo $\vec{H}$, $\vec{B}$ y momento dipolar magnetico $\vec{M}$ dentro del solenoide.

b La corriente inducida en la interfaz.



P1.
Considere dos conductores laminares cilíndricos coaxiales de longitud infinita y radios a y b,por los que circulan corrientes de intensidad I en sentidos contrarios. Suponga que el espacio comprendido entre los dos conductores está ocupado por dos medios de permeabilidad magnética μ_1 y μ_2. La superficie de separación entre los medios es plana, de forma que cada medios ocupa la mitad del espacio entre los conductores (ver figura). Calcule el campo magnético $\vec{B}$, la intensidad de campo magnético $\vec{H}$ y la densidad de corriente superficiela en los conductores.



Made with Goodnotes

Resumen

Magnetización

Definimos la magnetización de un material $\vec{M}$ como

$$\vec{M}\,dV = d\vec{m}$$

Campo $\vec{H}$ (Intensidad Magnética)

El vector de intensidad magnética $\vec{H}$ se define como:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} - \vec{M})$$

La ley de Ampère, que relaciona el campo magnético y la corriente, se presenta en dos formas:

- **Forma diferencial**:
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$
- **Forma integral**:
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

Medios Lineales

En materiales lineales, la magnetización es proporcional a la intensidad magnética:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

De aquí se deduce:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

donde $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ es la permeabilidad del material.

Condiciones de Borde

Las condiciones en la interfaz entre dos medios magnéticos son:

- **Continua de $\vec{B}$**:
$$B^2_\perp = B^1_\perp$$
- **Discontinuidad de $\vec{H}$**:
$$H^2_\parallel - H^1_\parallel = \vec{K}_l$$

Esto puede expresarse también como:

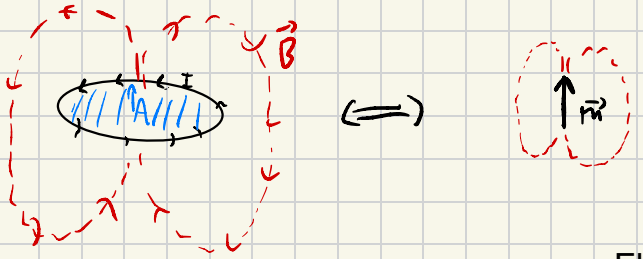
$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0$$

$$\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_l$$

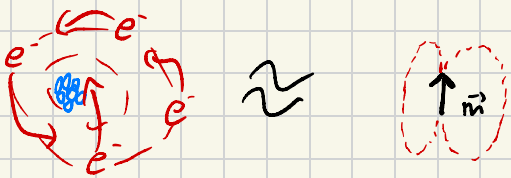
donde $\hat{n}_{12}$ es la normal que apunta desde el medio 1 hacia el medio 2.

Made with Goodnotes

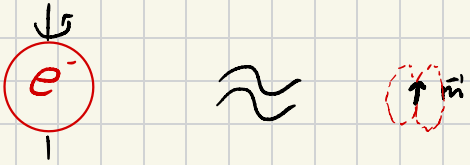
Los sistemas que producen campo magnético se pueden aproximar como dipolos magneticos $\vec{m}$. Los dipilos son sistemas que producen campos conocidos y simples.



Una espira circular con corriente se puede modelar con exactitud como un dipolo magnéticos.

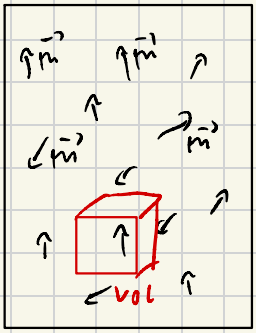


El átomo también es un cuerpo con corriente (electrones en movimiento) por lo que provoca un campo B. El átomo se aproxima a un dipolo magnético. Esta aproximación no es exacta pues los electrones se mueven en diferentes planos.



Los electrones rotando también se modelan como dipolo magnetico

Los medios materiales compuestos de átomos están repletos de $\vec{m}$ internos. Es por esto que se define el vector magnetización como una densidad de dipolos magneticos.

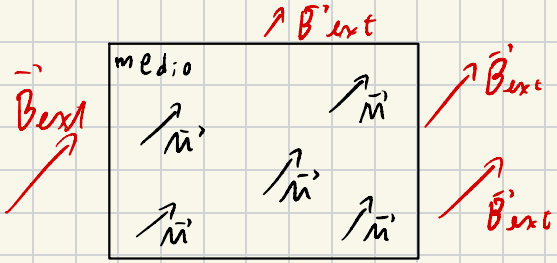


$$\vec{M}(r) = \lim_{Vol \to 0} \frac{1}{Vol} \sum^{Vol} \vec{m} = \frac{d\vec{m}}{dVol}$$

Se interpreta el $\vec{M}$ como la contribucion del medio en el campo magnetico.

Si los $\vec{m}$ están orientados aleatoriamente estos se cancelan y $\vec{M} = 0$

Made with Goodnotes



Frente a un campo B externo en algunos medios materiales los dipolos magnéticos (átomos) se alinean a este y contribuyen a aumentar el campo.

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_{medio} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_{ext} + \vec{M}$$

μ es la constante que depende del medio. El $\vec{M}$ al ser la contribución del medio no lleva constante. El $\vec{M}$ es la dependencia del medio.

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \vec{H} + \vec{M}$$

Se define el campo Intensidad del campo magnetico (H) como el campo independiente al medio, producido por una corriente.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$ no hay dependencia del medio

En régimen lineal $M \propto \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \chi \vec{H}$

χ: susceptibilidad magnetica depende del medio

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \vec{H}(1+\chi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0(1+\chi)}\vec{B} = \vec{H} \qquad \mu = \mu_0(1+\chi)$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

Basta con conocer $\vec{J}$ para sacar el $\vec{H}$ y con la permeabilidad magnetica μ obtenemos el $\vec{B}$.

Made with Goodnotes

Condiciones de Borde:

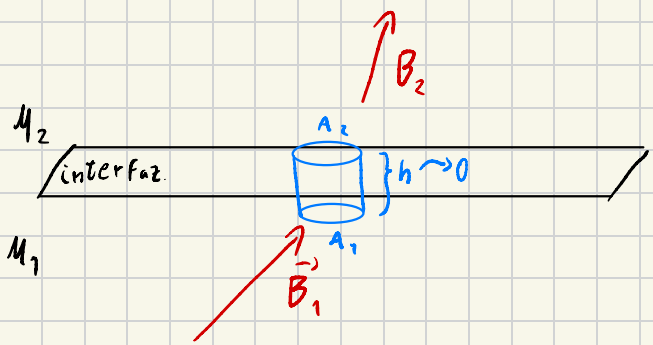
Usaremos las leyes de Maxwell y las leyes de Ampere y Gauss para ver el comportamiento en la interfaz entre dos materiales.

Sabemos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{Gauss} \Rightarrow \oiint \vec{B}\, d\vec{S} = \int_{Vol} \nabla \cdot \vec{B} = 0 = \oint_{\vec{B}}$$

El flujo en una sup. cerrada es 0.

Sean dos medios μ_1 y μ_2



La superficie Gaussiana es un cilindro con altura despreciable y bases paralelas a la interfaz entre los medios. Cada base esta en los distintos medios.

$$\oint_{\vec{B}} = \iint_{A_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}\, dS - \iint_{A_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}\, dS + \oint_{\text{manto}} = 0$$

(0 pues $h \approx 0$)

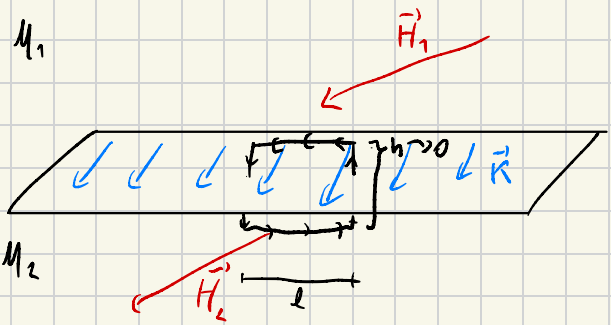
$$= B_n^1 \cdot A_1 - B_n^2 A_2 = 0 \qquad A_1 = A_2$$

$$\Rightarrow B_n^1 - B_n^2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_n^1 = B_n^2}$$

Las componentes normales del campo magnético son iguales en ambos medios

Made with Goodnotes

Sabemos: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \oint \vec{H} = \iint \vec{J} = I$



La curva cerrada es un rectangulo de ancho despreciable y largo l. La integral de linea corresponde a la integral de linea en el medio 1 mas la del medio dos. La integral de las caras normales a la interfaz se desprecia.

$$\oint \vec{H} = \int \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} + \int \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} + \int \vec{H}_1 \cdot d\vec{h} + \int \vec{H}_2 \cdot d\vec{h}$$

(los dos últimos términos tienden a 0 cuando $h \to 0$)

$$= H_t^1 \cdot l - H_t^2 \cdot l$$

con H_t la componente tangente a la interfaz de H

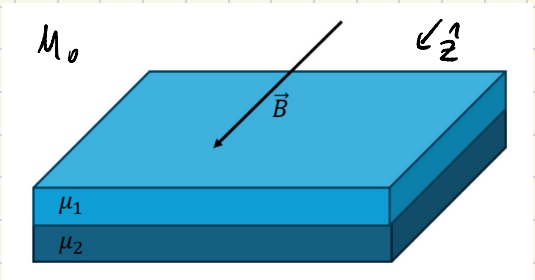
$$l(H_t^1 - H_t^2) = K \cdot l =$$

$$\Rightarrow \boxed{H_t^1 - H_t^2 = K}$$

Como $H = B/\mu \Rightarrow$ $\boxed{\frac{B_t^1}{\mu_1} - \frac{B_t^2}{\mu_2} = K}$

Made with Goodnotes

P1)



Si el campo en el aire es $\vec{B}$, el $\vec{H}$ sera $\vec{B}/\mu_0$ en todo el espacio dentro del solenoide independiente del medio.

Si $\vec{H} = B/\mu_0 \hat{z} \Rightarrow \vec{B} = \mu H \hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} B\,\hat{z} & \text{en el aire} \\ \frac{\mu_1}{\mu_0} B\,\hat{z} & \text{en el paramagnetico} \\ \frac{\mu_2}{\mu_0} B\,\hat{z} & \text{en el diamagnetico} \end{cases}$$

Notemos que $\frac{\mu_1}{\mu_0}\vec{B} < \vec{B}$ pues $\mu_1 < \mu_0$

y $\frac{\mu_2}{\mu_0}\vec{B} > \vec{B}$ pues $\mu_2 > \mu_0$

Para sacar el $\vec{M}$ usamos $\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$

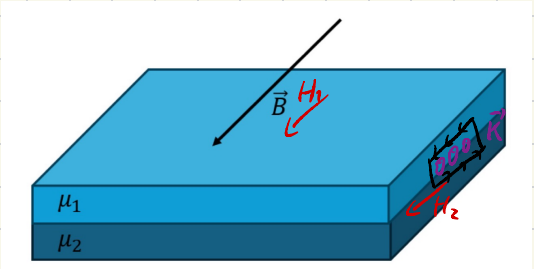
$\Rightarrow \vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{M}_i = \left(\frac{\mu_i}{\mu_0^2} B - \frac{1}{\mu_0} B\right)\hat{z} = \frac{1}{\mu_0} B \left(\frac{\mu_i}{\mu_0} - 1\right)\hat{z}$$

Made with Goodnotes

$$\vec{M} = \begin{cases} 0 & \text{en el aire} \\ \frac{1}{\mu_0} B \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) \hat{z} & \text{en el param. } (\vec{M} \text{ opuesto a } \vec{B}) \\ \frac{1}{\mu_0} B \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) \hat{z} & \text{en el diam.} \end{cases}$$

Usando condicion de borde $\boxed{H_t^1 - H_t^2 = K}$



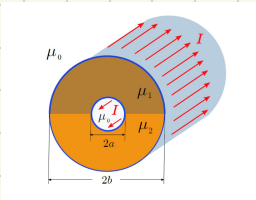
En este caso solo existe la componente tangencial de H

$\Rightarrow H_1 - H_2 = K \qquad H_1 = H_2$

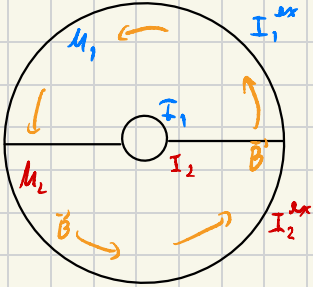
$\Rightarrow H_1 - H_2 = 0 = K = 0$ No hay corriente.

Made with Goodnotes

P2)

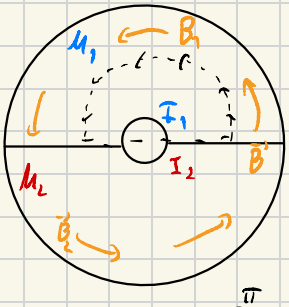


$\Leftrightarrow$



No podemos asumir que la corriente en ambas mitades de los conductores sea igual

$$I = I_1 + I_2 = I_1^{exterior} + I_2^{exterior}$$



Aplicamos ley de Ampere con una semicircunferencia cerrada

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_0^{\pi} H(r)\, r\, d\theta + \int_{recta} H_0 \cdot 2r$$

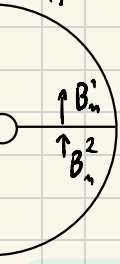
no hay H radial

$$= H_1(r)\, r\, \pi = I_1 \Rightarrow H_1(r) = \frac{I_1}{r\pi}$$

Analogo: $H_2(r) = \frac{I_2}{\pi r}$

Para saber I_2 y I_1 usamos la condicion de Borde

$B_n^1 = B_n^2$ En este caso, en la interfaz, solo existe componente normal de B



$$B_1 = B_2$$

Made with Goodnotes

$$B_1 = \mu_1 H_1 = \frac{\mu_1 I_1}{r\pi}$$
$$B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{\mu_2 I_2}{r\pi}$$
$$\Rightarrow \frac{\mu_1 I_1}{r\pi} = \frac{\mu_2 I_2}{r\pi}$$

$$\Rightarrow \mu_1 I_1 = \mu_2 I_2 \qquad \text{Sabemos } I_2 = I - I_1$$

$$\Rightarrow \mu_1 I_1 = \mu_2 (I - I_1)$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\mu_2 I}{\mu_1 + \mu_2}$$

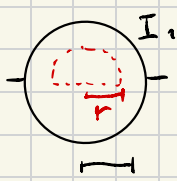
Analogo: $I_2 = \frac{\mu_1 I}{\mu_1 + \mu_2}$

$$\Rightarrow \vec{H}_1(r) = \frac{\mu_2 I}{\pi r(\mu_1+\mu_2)}\hat{\theta} \Rightarrow \vec{B}_1(r) = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi r(\mu_1+\mu_2)}\hat{\theta}$$

$$\vec{H}_2(r) = \frac{\mu_1 I}{\pi r(\mu_1+\mu_2)}\hat{\theta} \Rightarrow \vec{B}_2(r) = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi r(\mu_1+\mu_2)}\hat{\theta}$$

$\forall r$, $a < r < b$

Para el caso $r < a$



$$\oint H \cdot dl = H \cdot \pi r = I = 0$$

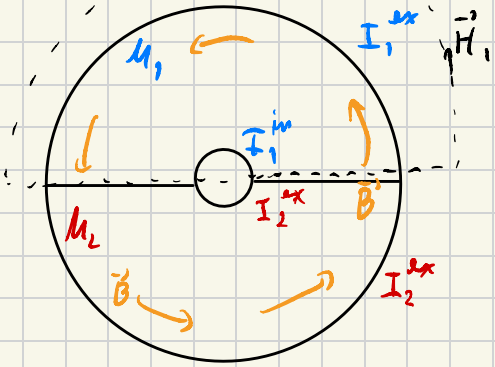
no hay corriente en $r < a$

$$\Rightarrow H = \frac{0}{\pi r} = 0$$

$$\Rightarrow B = 0 \qquad \forall r < a$$

Made with Goodnotes

Para el caso $r > b$: Usamos de nuevo la semicircunferencia cerrada para Ampere



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = I_1^{in} - I_1^{ex}$$

$$\Rightarrow H_1 \cdot \pi \cdot r = I_1^{in} - I_1^{ex}$$

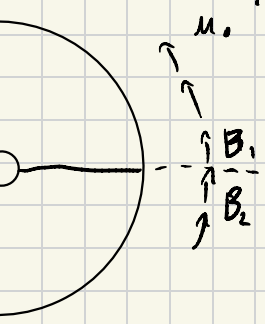
$$\Rightarrow \vec{H}_1(r) = \frac{I_1^{in} - I_1^{ex}}{\pi r} \hat{\theta}$$

Analogo: $\vec{H}_2(r) = \frac{I_2^{in} - I_2^{ex}}{\pi r} \hat{\theta}$

Para encontrar los I^{ex} usamos la condicion de borde

$$B_1^n = B_2^n \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \mu_0 H_1 = \mu_0 H_2$$

$$\Rightarrow H_1 = H_2$$



$$\Rightarrow \frac{I_1^{in} - I_1^{ex}}{\pi r} = \frac{I_2^{in} - I_2^{ex}}{\pi r}$$

$$\Rightarrow I_1^{in} - I_1^{ex} = I_2^{in} - I_2^{ex}$$

Made with Goodnotes

$$I_1^{in} = \frac{\mu_2 I}{\mu_1+\mu_2} \quad \wedge \quad I_2^{in} = \frac{\mu_1 I}{\mu_1+\mu_2}$$

$$I_1^{in} - I_2^{in} = I_1^{ex} - I_2^{ex}$$

$$\Rightarrow \frac{I}{\mu_1+\mu_2}(\mu_2-\mu_1) = I_1^{ex} - I_2^{ex} \qquad \text{sabemos } I_2^{ex} = I - I_1^{ex}$$

$$\Rightarrow \frac{I}{\mu_1+\mu_2}(\mu_2-\mu_1) = I_1^{ex} - I + I_1^{ex}$$

$$\Rightarrow \frac{I(\mu_2-\mu_1+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2} = 2\, I_1^{ex}$$

$$\Rightarrow \frac{I\,\mu_2}{\mu_1=\mu_2} = I_1^{ex} = I_1^{in}$$

Análogo: $I_2^{ex} = \frac{I\,\mu_1}{\mu_1+\mu_2} = I_2^{in}$

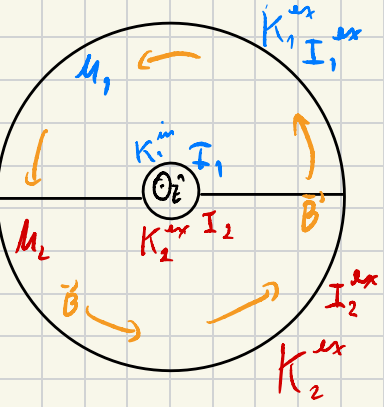
$$\Rightarrow H_1(r) = \frac{I_1^{in} - I_1^{ex}}{r\,\pi} = 0 \quad \Rightarrow B_1(r) = 0$$

$$\Rightarrow H_2(r) = \frac{I_2^{in} - I_2^{ex}}{r\,\pi} = 0 \quad \Rightarrow B_2(r) = 0$$

$\forall r > b$

Made with Goodnotes

Para sacar las densidades de corriente $\vec{K}$ dividimos la corriente en su largo transversal



$$K_1^{in} = \frac{I_1}{a\pi}\hat{z} = \frac{\mu_2 I}{(\mu_1+\mu_2)a\pi}\hat{z}$$

$$K_2^{in} = \frac{\mu_1 I}{(\mu_1+\mu_2)a\pi}\hat{z}$$

$$K_1^{ex} = \frac{I_1}{b\pi}(-\hat{z}) = \frac{-\mu_2 I}{(\mu_1+\mu_2)b\pi}\hat{z}$$

$$K_2^{ex} = \frac{-\mu_1 I}{(\mu_1+\mu_2)b\pi}\hat{z}$$

Made with Goodnotes