



# Resumen de producto cruz

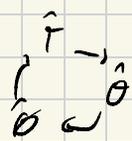
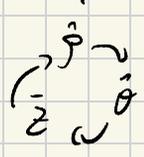
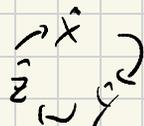
$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \wedge \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \wedge \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \wedge \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad \wedge \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad \wedge \quad \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y} \quad \wedge \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \wedge \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad \wedge \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$



$$\vec{A} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\vec{B} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$= a_x \hat{x} \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$+ a_y \hat{y} \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$+ a_z \hat{z} \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$= a_x b_y (\hat{x} \times \hat{y}) + a_x b_z (\hat{x} \times \hat{z}) \rightarrow a_x b_y \hat{z} + a_x b_z (-\hat{y})$$

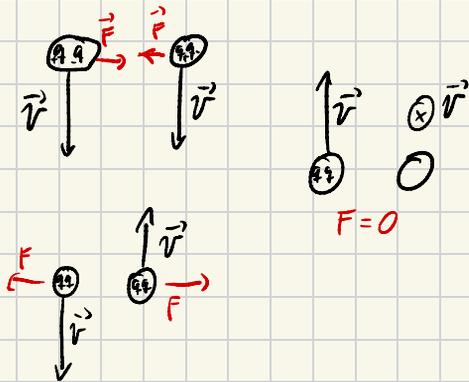
$$+ a_y b_x (\hat{y} \times \hat{x}) + a_y b_z (\hat{y} \times \hat{z}) \rightarrow -a_y b_x \hat{z} + a_y b_z \hat{x}$$

$$+ a_z b_x (\hat{z} \times \hat{x}) + a_z b_y (\hat{z} \times \hat{y}) \rightarrow a_z b_x \hat{y} + a_z b_y (-\hat{x})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}$$

Analogo para coord. cilindricas y esfericas

Experimentalmente se sabe que las cargas en movimiento experimentan una fuerza entre ellas proporcional a su velocidad. Esta fuerza es independiente de la fuerza de Coulomb (eléctrica) pues si los cuerpos tienen carga neta 0 ( $q+(-q)$ ) la siguen experimentando.



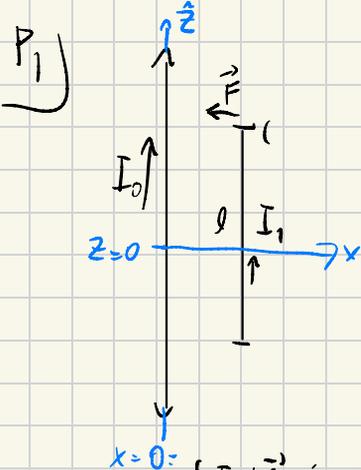
La fuerza es atractiva si ambas se mueven en el mismo sentido. Es repulsiva si se mueven en sentidos contrarios y es nula si las velocidades son perpendiculares entre sí y a su posición relativa ( $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ )

Este comportamiento se puede modelar con el producto cruz

$$\vec{F} \propto \vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]$$

Además al mayor sea la carga en movimiento mayor será la fuerza.  $F \propto q_1 \cdot q_2$  y inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las cargas  $F \propto \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}$

Con esto tenemos: 
$$F = k_{\text{ext}} \frac{q_1 \cdot \vec{v}_1 \times [q_2 \cdot \vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}$$



Si tenemos un montón de cargas es decir muchos  $dq$ , lo expresamos de forma integral

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{(dq_{(r_2)} \vec{v}_2) \times [dq_{(r_1)} \vec{v}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

En un conductor con corriente  $dq \vec{v} = I d\vec{l}$  siendo  $I$  la corriente y  $d\vec{l}$  el vector para donde se mueve la carga de dicha corriente

$$I d\vec{l} = \begin{cases} I d\vec{l} : & \text{---} \xrightarrow{I} \text{---} \\ \vec{k} dA : & \text{---} \xrightarrow{I} \text{---} \\ \vec{j} dV : & \text{---} \xrightarrow{I} \text{---} \end{cases} \quad \hookrightarrow \quad F = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{(I, d\vec{l}) \times [I_0 d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$I_0 d\vec{l} = I_0 dz' \hat{z}$$

$$I_1 d\vec{l} = I_1 dz \hat{z}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + z \hat{z} \\ \vec{r}' &= z' \hat{z} \end{aligned} \right\} \vec{r} - \vec{r}' = x \hat{x} + (z - z') \hat{z}$$

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_1 dz \hat{z} \times [I_0 dz' \hat{z} \times x \hat{x} + (z - z') \hat{z}]}{(x^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$$F = \frac{I_1 I_0 \mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \hat{z} \times [dz' \hat{z} \times x \hat{x} + dz' \hat{z} \times (z - z') \hat{z}]}{(x^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$$F = \frac{I_1 I_0 \mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \hat{z} \times [dz' \hat{z} \times x \hat{x} + dz' \hat{z} \times (z-z') \hat{z}]}{(x^2 + (z-z')^2)^{3/2}}$$

$$F = \frac{I_1 I_0 \mu_0}{4\pi} \iint \frac{dz \hat{z} \times dz' \hat{y}}{(x^2 + (z-z')^2)^{3/2}}$$

Calculadora de Integrales:

$$\vec{F}_{(x)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 I_1}{x^2} \hat{x} \quad \text{fuerza atractiva}$$

Para el caso en que las corrientes son opuestas solo cambia

$$I_1 d\vec{r}' \text{ pasa de } I_1 \hat{z} dz \text{ a } -I_1 \hat{z} dz$$

Por lo que la fuerza es:

$$\vec{F}_{(x)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_0}{x^2} \hat{x} \quad \text{fuerza repulsiva.}$$



P<sub>2</sub>) Además de producir fuerzas entre ellas, las cargas en movimiento alteran el comportamiento de los imanes. De manera que las brujulas y objetos magnetizados se alineaban perpendicularmente al sentido de la corriente.



Por esto se introdujo el campo magnético  $\vec{B}$  que cumple:

$$\vec{B}(\vec{r}) \propto \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} \quad \text{y} \quad \vec{B} \propto q(\vec{r}') \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

donde  $q(\vec{r}') \vec{v}'$  es la carga que se mueve que produce el campo.  $\vec{r}'$  es la posición de la carga.

Finalmente tenemos 
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

En el caso de un conductor con corriente  $q \vec{v}' = I d\vec{r}'$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Usando esta expresión calcularemos el campo magnético que produce una lamina conductora de corriente  $K\hat{x}$ .

$$I d\vec{l} = \vec{K} dA = K \hat{x} dx dy$$

Por simetría podemos decir que calcular el campo en el eje z es equivalente a calcularlo en cualquier punto del espacio

$$\Rightarrow \vec{r}' = z \hat{z}$$

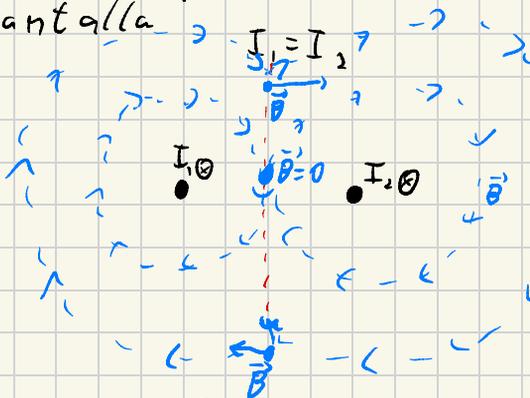
$$r'' = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$\Rightarrow B(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(K \hat{x} dx dy) \times (z \hat{z} - x \hat{x} - y \hat{y})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{z} &= -\hat{y} \\ \hat{x} \times \hat{x} &= 0 \\ \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dx dy \hat{y} + y dx dy \hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Vemos que un cable con corriente producirá un campo circunferencial. Veamos que ocurre si hay 2 cables paralelos con corriente que entra a la pantalla.



Notamos que en el eje equidistante de los cables la componente vertical del campo se cancela y solo queda campo horizontal.

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4$$



Pasa lo mismo si tenemos 4 cables iguales

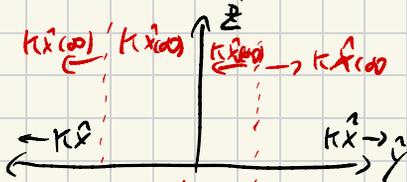
Podemos concluir que si en un eje existe a ambos lados corriente con misma magnitud direccion y posición, el campo  $\vec{B}$  en el eje no tendrá componente paralela al eje



$$\vec{B}(x=0, z) \cdot \hat{z} = 0$$

$$B_z(x=0, z) = 0$$

Este es el caso de la placa infinita, donde podemos decir que cualquier eje tiene la misma corriente infinita a ambos lados



Así; concluimos que el campo generado no tiene componente en  $\hat{z}$

$$\vec{B}_{(r)} = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \, dx \, dy \, \hat{y} + y \, dx \, dy \, \hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-\mu_0 k z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \, dy \, \hat{y}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Notemos que integrar en todo el plano xy es  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, dy \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr$  pues  $dA = dx \, dy = r \, d\theta \, dr$

con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{B}(r) = \frac{-\mu_0 k z}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r \, d\theta \, dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{y}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{-\mu_0 k z}{2} \int_0^{\infty} \frac{r \, dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{y}$$

Con  $u = r^2 + z^2 \Rightarrow \frac{du}{dr} = 2r \Rightarrow dr = \frac{du}{2r}$

$$B(\vec{r}') = \frac{\mu_0 k z}{2} \int_{z^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}} \hat{y} = \frac{\mu_0 k z}{2} (-2) \left( \frac{1}{\sqrt{u}} \right) \Big|_{z^2}^{\infty} \hat{y}$$

$$B(\vec{r}') = \frac{+\mu_0 k z}{2} \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right) \hat{y} = -\frac{\mu_0 k z}{2} \frac{1}{|z|} \hat{y}$$

$$B(\vec{r}') = \begin{cases} -\frac{\mu_0 k}{2} & \text{si } z > 0 \\ \frac{\mu_0 k}{2} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Tal como el caso de la placa cargada  $\infty$  el campo es independiente de la distancia de la placa

b) Definido el campo magnetico como  $\frac{q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$  podemos calcular la fuerza de Lorentz ahora en funcion del campo

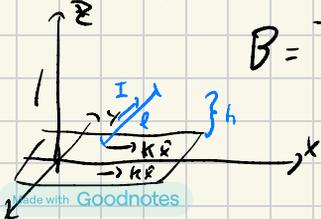
$$F(\vec{r}) = \frac{q \vec{v} \times [q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

En el caso de corriente  $\vec{F}(\vec{r}') = \int I d\vec{l}_{(r')} \times \vec{B}(\vec{r})$

Con esta expresion calcularemos la fuerza que experimenta el cable

Caso  $I \hat{y} = I \vec{e}_y$

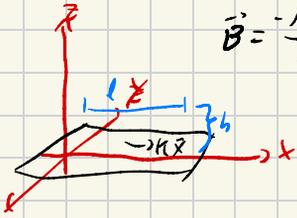
$$B = -\frac{\mu_0 k}{2} \hat{y} \quad F = \int_0^l (I \hat{y} dy) \times \left( -\frac{\mu_0 k}{2} \right) \hat{y} = 0 \text{ pues } \hat{y} \times \hat{y} = 0$$



La fuerza es nula cuando la corriente corre igual que  $\vec{B}$ .

Caso  $I \hat{x} = I \hat{l}$

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 k}{2} \hat{y}$$



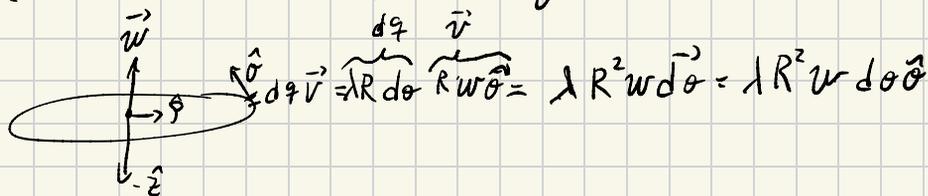
$$F = \int_0^l (I dx \hat{x}) \times \left( \frac{-\mu_0 k}{2} \hat{y} \right)$$

$$F = \frac{I \mu_0 k}{2} \hat{z} \int_0^l dx$$

$$\vec{F} = \frac{-I \mu_0 k l}{2} \hat{z}$$

17)

En presencia de un campo magnético el anillo cargado en rotación experimenta una fuerza, pues no es más que carga en movimiento.



$$\vec{B} = B \hat{z}$$

$$d\vec{F}_m = (dq \vec{v}) \times (\vec{B})$$

$$= (\lambda R^2 \omega d\theta \hat{\theta}) \times (B \hat{z})$$

$$= \lambda R^2 \omega d\theta (\hat{\theta} \times \hat{z})$$

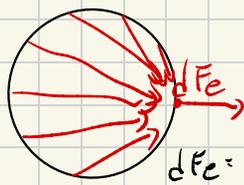
$$d\vec{F}_m = \lambda R^2 \omega d\theta \hat{\phi}$$

$dF$

$$\Rightarrow dF_r = \lambda R^2 \omega d\theta$$

Al no decirnos la masa, la despreciaremos y con esto su fuerza centrípeta.

La otra fuerza radial que actúa es la de la repulsión eléctrica que experimenta una sección del anillo con el resto de este



Como  $dF_e$  no depende de  $w$ , la asumiremos conocida para ahorrarnos el cálculo con integrales.

$$dF_e = F_c R d$$

$$dF_r = dF_m + dF_e$$

$$T = \alpha \int dF_r = \alpha \int dF_m + dF_e$$

$$= \alpha \int_0^{2\pi} \lambda R^2 \omega d\theta + R F_e d\theta$$

\* El enunciado nos dice que la tensión en el anillo es proporcional al total de fuerza en la componente radial que experimenta

$$T = 2\pi \alpha R (\lambda R \omega + F_e)$$

Esta es la tensión existente en el anillo

Para conocer la velocidad máxima que puede soportar

$$\text{Max} \{ \omega \in [-\infty, \infty] ; T \leq T_0 \} = \omega_{\text{max}}$$

$$= \text{Max} \left\{ \omega \in [-\infty, \infty] \frac{\text{Rad}}{\text{seg}} ; 2\pi \alpha R (\lambda R \omega + F_e) \leq T_0 \right\}$$

$$= \text{Max} \left\{ \omega \in [-\infty, \infty] \frac{\text{Rad}}{\text{seg}} ; \lambda R \omega \leq \frac{T_0}{2\pi \alpha R} - F_e \right\}$$

$$= \text{Max} \left\{ \omega \in [-\infty, \infty] \frac{\text{Rad}}{\text{seg}} ; \omega \leq \frac{T_0}{2\pi \alpha R^2 \lambda} - \frac{F_e}{R \lambda} \right\}$$

$$\omega_{\text{max}} = \frac{T_0}{2\pi \alpha R^2 \lambda} - \frac{F_e}{R \lambda}$$

