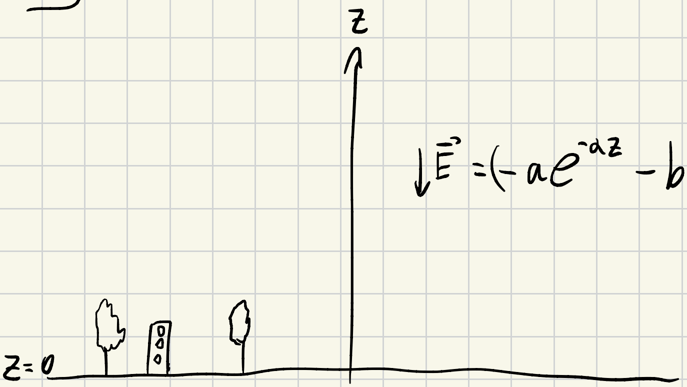
P1)



$$\downarrow \vec{E} = (-a e^{-\alpha z} - b e^{-\beta z})\hat{k}$$

a) Sabemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \vec{E}$

$$= \frac{\partial}{\partial z} E$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left(a e^{-\alpha z} - b e^{-\beta z}\right)$$

$$= a\alpha e^{-\alpha z} + b e^{-\beta z} = \rho_{(z)}/\varepsilon_0$$

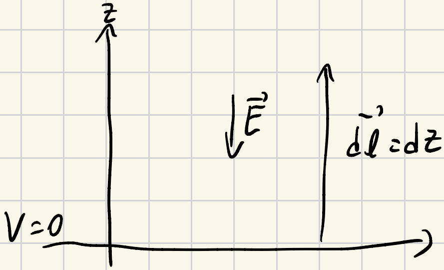
$\Rightarrow \rho_{(z)} = \varepsilon_0 \left(a\alpha e^{-\alpha z} + b\beta e^{-\beta z}\right)$ para $z > 0$

b) Sabemos que $V_{(\vec{r})} - V_{(\vec{r}_{ref})} = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Podemos usar de referencia $z = \infty \Rightarrow E \approx 0$

o en este caso en que $z=0$ no se indefine el campo $z=0 \Rightarrow |\vec{E}| = a+b$

$\Rightarrow$ definimos $\vec{r}_{ref} : z = 0 \Rightarrow V_{(z=0)} = 0$



$$V(z) - \cancel{V(ref)}^{\,0} = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow V(z) = +\int_0^z a e^{-\alpha z} + b e^{-\beta z}\, dz$$

$$\Rightarrow V(z) = -\frac{a}{\alpha} e^{-\alpha z}\Big|_0^z - \frac{b}{\beta} e^{-\beta z}\Big|_0^z$$

$$= -\frac{a}{\alpha}(e^{-\alpha z} - 1) - \frac{b}{\beta}(e^{-\beta z} - 1)$$

$$V(z) = \frac{a}{\alpha}(1 - e^{-\alpha z}) + \frac{b}{\beta}(1 - e^{-\alpha z})$$

c) Si $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l}$ y $\vec{E} = \vec{F}/q \Rightarrow V = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = W/q$

Podemos entender V como trabajo electrico por unidad de carga. Este trabajo es el que actua en mover de un punto A a uno B

$Q\,(V(A) - V(B))$ = W realizado por el $\vec{E}$ sobre la carga Q al moverse de A a B.

Si una carga $+q$ se quiere mover de $z=0$ a $z=\infty$ el trabajo realizado por $\vec{E}$ será:

$$W = \Delta V \cdot Q = (V(0) - V(\infty))\, Q$$

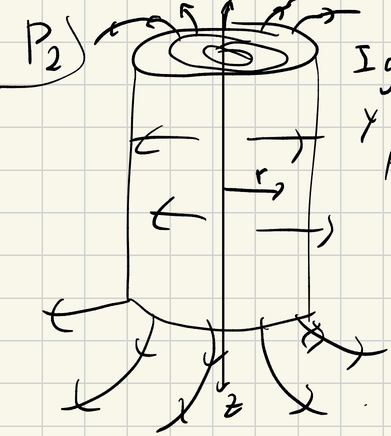
$$= (0 - V(\infty))\, q$$

$$= -\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) q$$

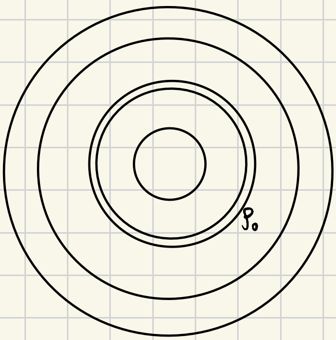
Al ser negativo, quiere decir que se opone al mov.

$\Rightarrow -\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) q$ es la energia necesaria para ir de $z=0$ a $z=\infty$

P_2)

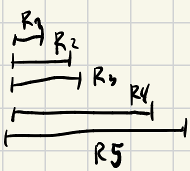


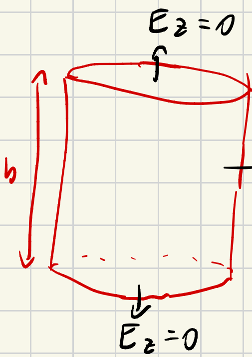
Ignoraremos los efectos de borde y asumiremos el campo e. $\vec{E}$.
Asumiremos el campo con solo componente en $\hat{r}$ en cilíndricas.



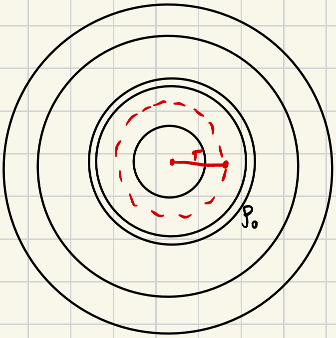
Calculemos el campo e. $\vec{E}$, el que asumimos por simetría $E\hat{r}$

Tomemos la superficie cerrada de un cilindro concentrico a los cilindros conductores, de radio r y altura h.
A priori los conductores son neutros $\rho = 0$





Caso $r < R_2$



$\rightarrow E_{(r)_r} = cte$ en todo el manto por simetría cilíndrica.

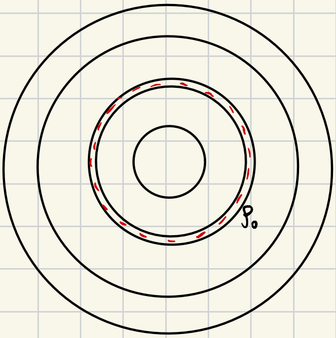
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \cdot Area = E_r \cdot 2\pi r h$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = 0$$

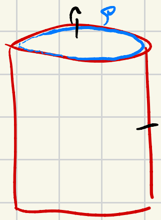
$$\Rightarrow E_r 2\pi r h = 0 \Rightarrow \vec{E}(r) = 0$$

Made with Goodnotes

Caso $R_2 < r < R_3$



$E_z = 0$



$\rightarrow E_r = cte$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_r \, 2\pi r h$$

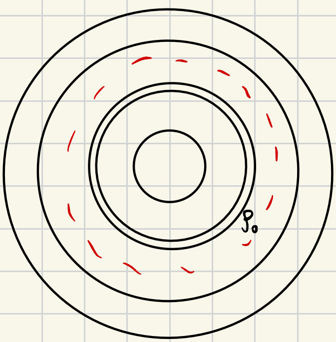
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \rho_0 \cdot \text{Volumen}$$

$$= \rho_0 \cdot \pi h (r^2 - R_2^2)$$

$$E_r \cdot 2\pi r h = \rho_0 \pi h (r^2 - R_2^2)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \rho/2 \left(r - \frac{R_2^2}{r} \right) \hat{r}$$

Caso $R_3 < r < R_4$



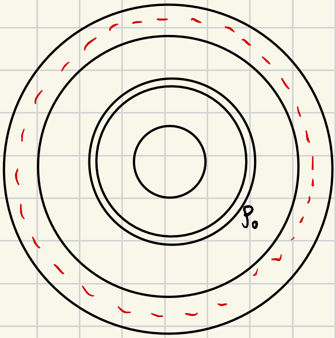
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_r \, 2\pi r h$$

$$= \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q_{ence..}}{\varepsilon_0}$$

$$= \rho \cdot \pi h (R_3^2 - R_2^2)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho}{2r} (R_3^2 - R_2^2) \hat{r}$$

Caso $R_4 < r < R_5$: Dentro del conductos



En el conductor cualquier $\vec{E}$ existente reorienta las cargas hasta que se llegue a un equilibrio de $\vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = 0$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Notemos que la carga neta encerrada por $r \in (R_4, R_5)$ es 0, por lo que la carga de los conductores debe anular al de ρ_0

El conductor central sabemos que es neutro pues $\vec{E} = 0$

Pero el conductor esta sometido a un campo externo por ρ_0 que reorientara sus cargas creando σ en R_4

$$Q_{encerrada} = \rho \cdot \pi h (R_3^2 - R_2^2) + \sigma_{R_4} \cdot Area$$

$$\Rightarrow \quad -\rho \cdot \pi h (R_3^2 - R_2^2) = \sigma_{R_4} \cdot 2\pi R_4 h$$

$$\Rightarrow \sigma_{R_4} = \frac{-\rho}{2 R_4} (R_3^2 - R_2^2)$$

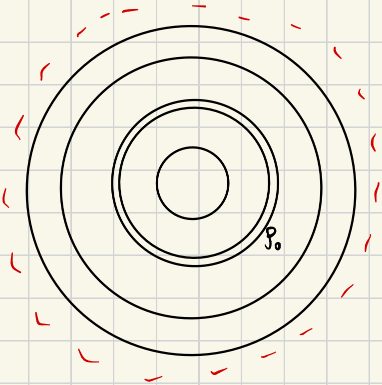
Por conservacion de carga, pues el conductor tiene carga neta nula existe una carga positiva fuera de $r \in (R_4, R_5)$ que compensa el $-\sigma_{R_4}$

$$Q = \sigma_{R_4} \cdot Area + \sigma_{R_5} \cdot Area = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\rho \pi h (R_3^2 - R_2^2) = -\sigma_{R_5} \cdot 2\pi R_5 h$$

$$\Rightarrow \sigma_{R_5} = \frac{\rho}{2 R_5} (R_3^2 - R_2^2)$$

Caso $r > R_5$



$$\oint \vec{E}\cdot d\ell = E_r\, 2\pi r h$$

$$= Q/\varepsilon_0$$

$$= Q_{\rho_0} + \cancel{Q_{conductor}} \rightarrow 0$$

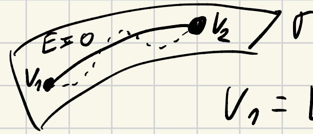
$$= Q_{\rho_0}$$

$$E_r\, 2\pi r h = \rho \pi h \left(R_3^2 - R_2^2\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho}{2r}\left(R_3^2 - R_2^2\right)$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_2 \\ \frac{\rho}{2}\left(r - \frac{R_2^2}{r}\right)\hat{r} & R_2 < r < R_3 \\ \frac{\rho}{2r}\left(R_3^2 - R_2^2\right)\hat{r} & R_3 < r < R_4 \\ 0 & R_4 < r < R_5 \\ \frac{\rho}{2r}\left(R_3^2 - R_2^2\right)\hat{r} & R_5 < r \end{cases}$$

b) Notemos que campo e. $\vec{E}$ es nulo dentro del conductor. Esto hace que la diferencia de potencial de dos puntos dentro del conductor es 0



$$\Delta V = -\int \underbrace{\vec{E}}_{=0} \cdot d\vec{l} = 0$$

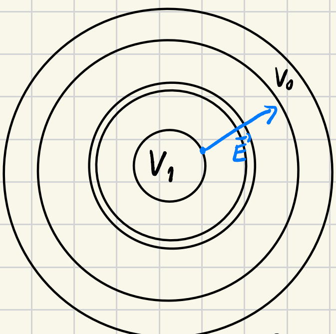
$$V_1 = V_2$$

Esto nos dice que un conductor ideal tiene en todos sus puntos mismo potencial.

En el enunciado se ve que el conductor externo esta conectado a tierra

Esto quiere decir que esta conectado a un gran potencial de referencia al cual se define como nulo: Tierra $\Leftrightarrow V = 0$

Calculemos la diferencia de Potencial entre los conductores



$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\rho}{2}\left(r - \frac{R_2^2}{r}\right)\hat{r} \\ \frac{\rho}{2r}(R_3^2 - R_2^2)\hat{r} \\ 0 \\ \frac{\rho}{2r}(R_3^2 - R_2^2)\hat{r} \end{cases}$$

$$\Delta V = V_1 - V_0$$

$$V_1 - V_0 = -\int_{R_1}^{R_4} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{R_1}^{R_2} 0\, d\vec{l} - \int_{R_2}^{R_3} \frac{\rho}{2}\left(r - \frac{R_2^2}{r}\right)\hat{r} \cdot d\vec{l} - \int_{R_3}^{R_4} \frac{\rho}{2r}(R_3^2 - R_2^2)$$

Sea $d\vec{l} = d\vec{r}$ la mas sencilla parametrización

$$\Delta V = 0 - \frac{\rho}{2}\int_{R_2}^{R_3}\left(r - \frac{R_2^2}{r}\right)dr - \frac{\rho}{2}\left(R_3^2 - R_2^2\right)\int_{R_3}^{R_4}\frac{1}{r}\,dr$$

$$= 0 - \frac{\rho}{2}\left[\frac{r^2}{2}\Big|_{R_2}^{R_3} - R_2^2\ln(r)\Big|_{R_2}^{R_3} - \left(R_3^2 - R_2^2\right)\ln(r)\Big|_{R_3}^{R_4}\right]$$

$$= -\frac{\rho}{2}\left[\frac{R_3^2 - R_2^2}{2} - R_2^2\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) - \left(R_3^2 - R_2^2\right)\ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right)\right]$$