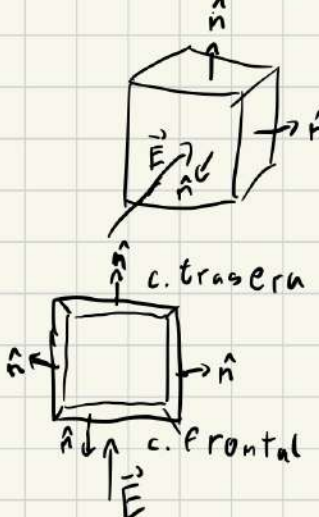


P₇

$$\text{Flujo} = \Phi(\vec{s}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS$$

escalar
vector
escalar

a)



Caras laterales $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

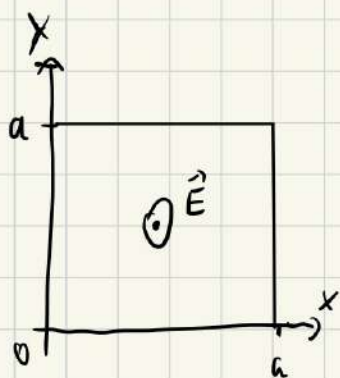
Cara frontal: $\vec{E} \cdot \hat{n} = -E$

Cara trasera: $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$

Si el campo sale de la superficie cerrada se define positivo.
Si entra se define negativo.

$$\Phi_{\text{total}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum \Phi_{\text{cara } i}$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + \Phi_{\text{cara Frontal}} + \Phi_{\text{cara trasera}}$$



$$\Phi_{\text{cara Frontal}} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_S (-E) \, dS$$

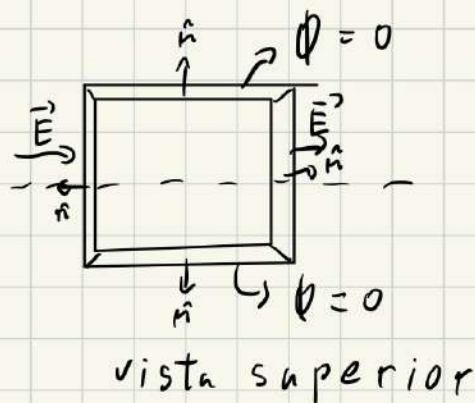
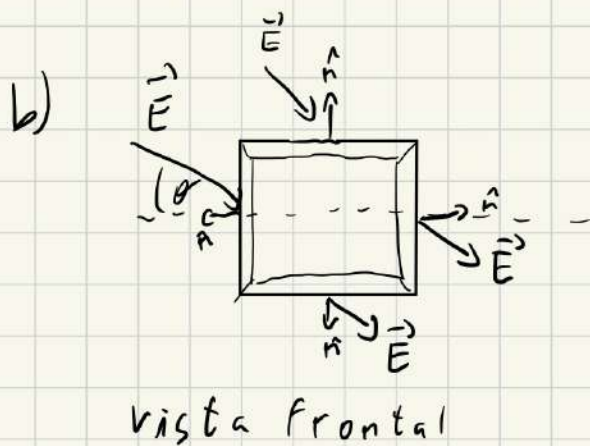
$$= -E \int_0^a \int_0^a dx \, dy$$

$$= -E a^2$$

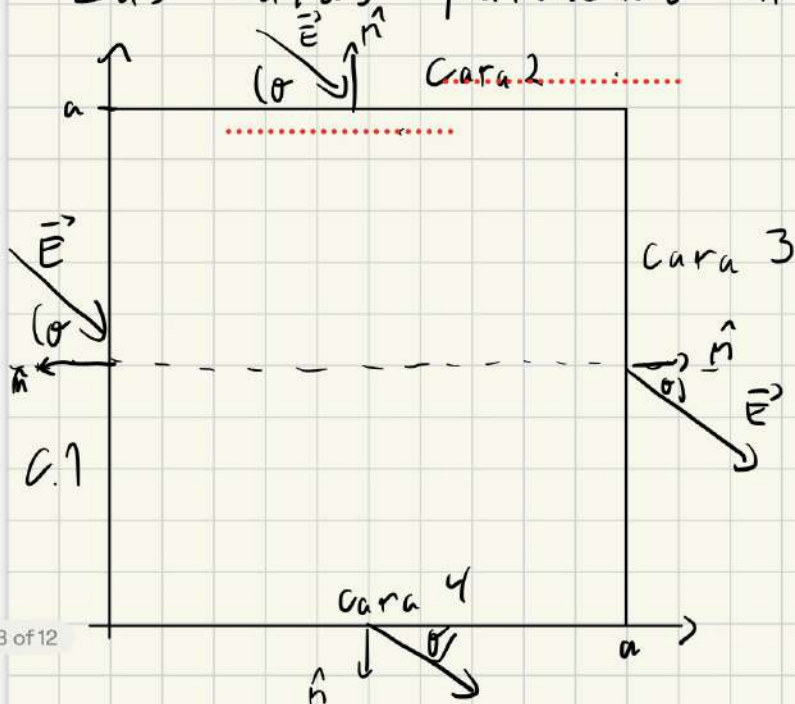
Analogía: $\phi_{\text{cara trasera}} = E a^2$

$$\Rightarrow \phi_{\text{total}} = \phi_{\text{cara frontal}} + \phi_{\text{cara trasera}} = -E a^2 + E a^2$$

$$\Rightarrow \phi_{\text{total}} = 0$$

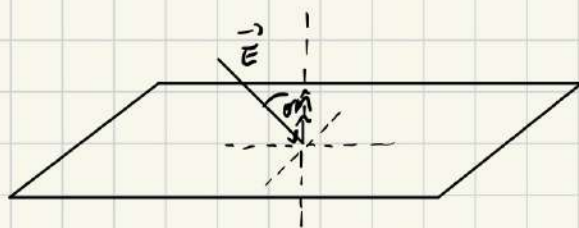


Las caras paralelas al campo tienen $\phi = 0$



Nombramos las caras

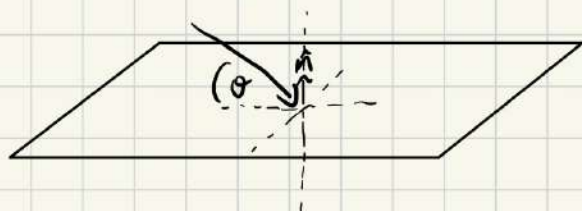
Cara 1:



$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \hat{n} &= -|\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \cos(\theta) = -E \cdot 1 \cdot \cos(\theta) \\ &= -E \cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\phi_{c.1} = \iint_{\text{area}} -E \cos(\theta) \, dx \, dy = -E a^2 \cos(\theta)$$

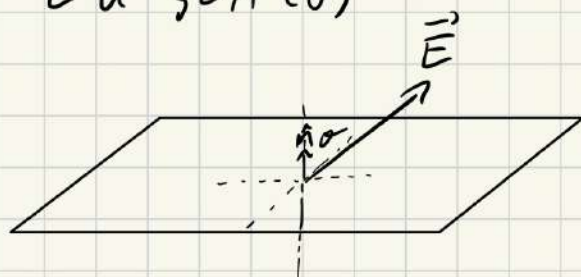
Cara 2:



$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \hat{n} &= -|\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \sin(\pi/2 - \theta) = -|\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \sin(\theta) \\ &= -E \sin(\theta)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi_{c.2} = -E a^2 \sin(\theta)$$

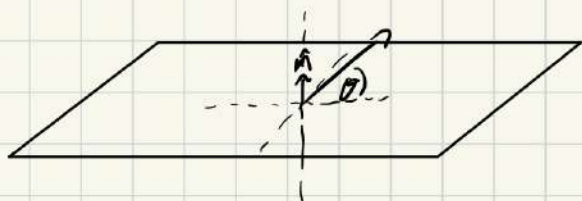
Cara 3:



$$\vec{E} \cdot \hat{n} = |\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \phi_{c.3} = E a^2 \cos(\theta)$$

Cara 4:



$$\vec{E} \cdot \hat{n} = |\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \phi = E a^2 \cos(\theta)$$

$$\Phi_{\text{total}} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6$$

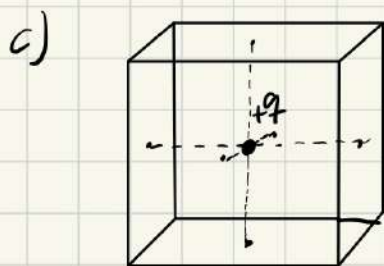
$$= -E a^2 \cos(\theta) + -E a^2 \cos(\theta) + E a^2 \cos(\theta) + E a^2 \cos(\theta) + 0 + 0$$
$$= 0$$

Con la ley de Gauss

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{\text{total}} = \int_V \underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\rho/\epsilon_0} dV_{\text{volumen}}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV_{\text{volumen}} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{encerrada}}$$

En (a) y (b) no existía carga al interior de los cubos. Por ley de Gauss podemos decir $\Phi_{\text{total}} = 0$ sin necesidad de calcular nada.



Por ley de Gauss sabemos que

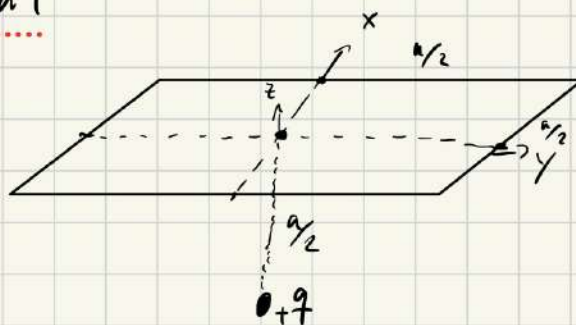
$$\Phi_{\text{total}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

$$= q/\epsilon_0$$

Pero no conocemos el campo electrico.

En este caso a ausencia de simetria del campo en la superficie, debemos usar el metodo tradicional

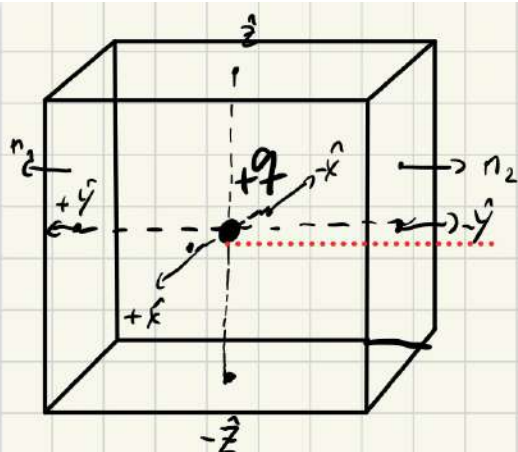
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{a}{2}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{a}{2}\hat{z}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$



Expresamos el campo total en todas las caras.

$$\text{Cara 1: } (y = a/2) : \vec{E}(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + z\hat{z} + \frac{a}{2}\hat{y}}{(\sqrt{x^2 + z^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

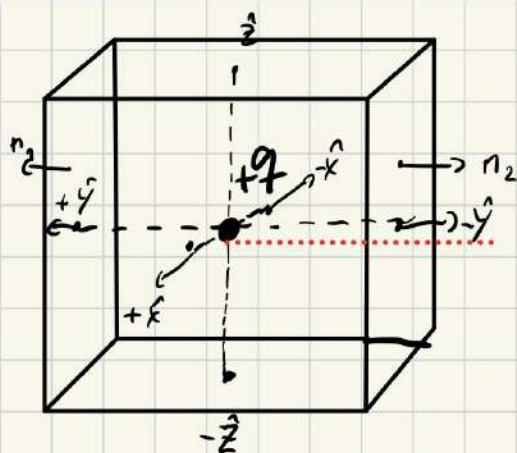
$$\text{Cara 2: } (y = -a/2) : \vec{E}(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + z\hat{z} - \frac{a}{2}\hat{y}}{(\sqrt{x^2 + z^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 3: } (z = a/2) : \vec{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{a}{2}\hat{z}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 4: } (z = -a/2) : \vec{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} - \frac{a}{2}\hat{z}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 5: } (x = a/2) : \vec{E}(y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y\hat{y} + z\hat{z} + \frac{a}{2}\hat{x}}{(\sqrt{z^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 6: } (x = -a/2) : \vec{E}(y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y\hat{y} + z\hat{z} - \frac{a}{2}\hat{x}}{(\sqrt{z^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$



Expresamos el campo total en todas las caras.

$$\text{Cara 1: } (y = a/2) : \vec{E}(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + z\hat{z} + \frac{a}{2}\hat{y}}{(\sqrt{x^2 + z^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 2: } (y = -a/2) : \vec{E}(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + z\hat{z} - \frac{a}{2}\hat{y}}{(\sqrt{x^2 + z^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 3: } (z = a/2) : \vec{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{a}{2}\hat{z}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

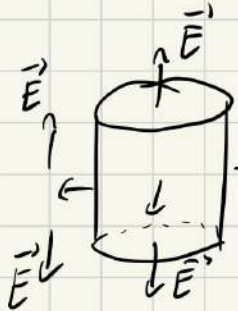
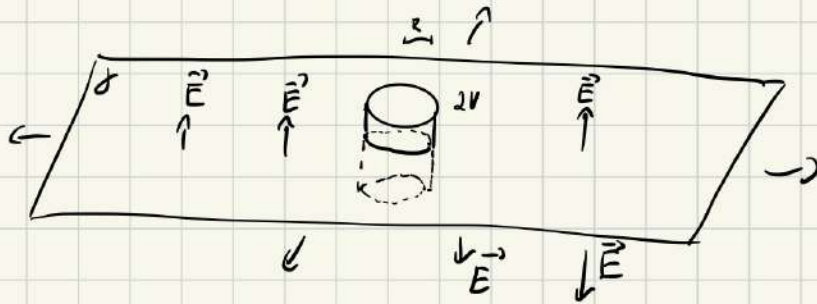
$$\text{Cara 4: } (z = -a/2) : \vec{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} - \frac{a}{2}\hat{z}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 5: } (x = a/2) : \vec{E}(y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y\hat{y} + z\hat{z} + \frac{a}{2}\hat{x}}{(\sqrt{z^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

$$\text{Cara 6: } (x = -a/2) : \vec{E}(y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\hat{z} + y\hat{y} - \frac{a}{2}\hat{x}}{(\sqrt{z^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}})^3}$$

P2)

a)



El flujo en el manto del cilindro es 0, Pues el campo es tangencial a este

Por otro lado sabemos por simetría que el campo que atraviesa las bases es siempre de la misma magnitud y saliendo del volumen

$$\Rightarrow \Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{base}} = 2 \Phi_{\text{base}} = 2 \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

Por simetría $|\vec{E}|$ es cte y al ser normal a las bases $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ cte

$$\Phi_{\text{total}} = 2 E \int_S dA = 2 E (\text{Área}) = 2 E (R^2 \pi)$$

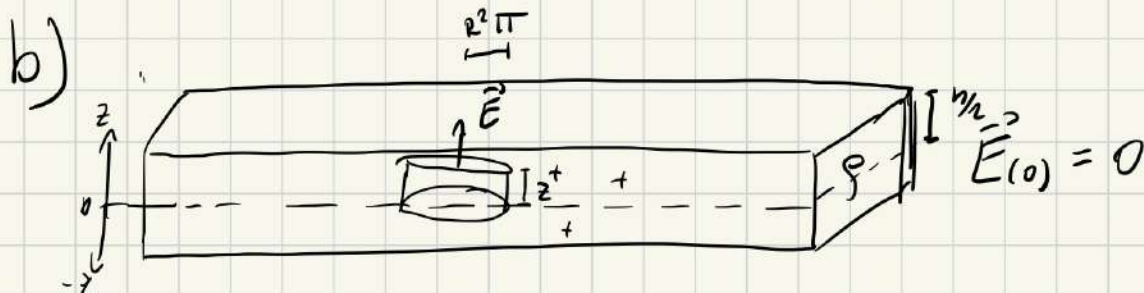
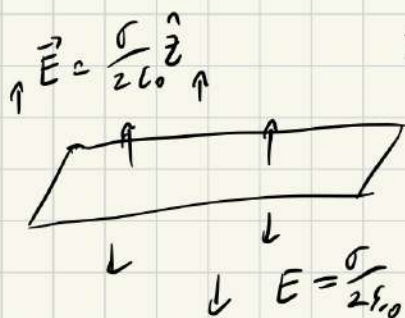
Por Gauss:

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

$$2E(R^2\pi) = \frac{\sigma(R^2\pi)}{\epsilon_0}$$

$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow$ En la placa infinita se produce un campo superior hacia arriba de magnitud $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

e inferior hacia abajo de igual magnitud.



Caso $z < \frac{h}{2}$

En este caso tanto el manto como la base en $z=0$ no tienen flujo, pues $\vec{E}(z=0) = 0$ ya que los campos de las mitades superior e inferior se cancelan

$$\Phi_{\text{total}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{\text{base superior}}$$

$$= \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

por simetría $\vec{E}'$ es
cte en la base sup.

$$= E \int dA =$$

$$= E (R^2 \pi)$$

Por Gauss

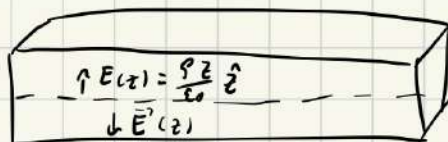
$$\Phi_{\text{total}} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{s} = \int_{V_{\text{el}}} \nabla \cdot \vec{E}' dV = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

$$E (R^2 \pi)$$

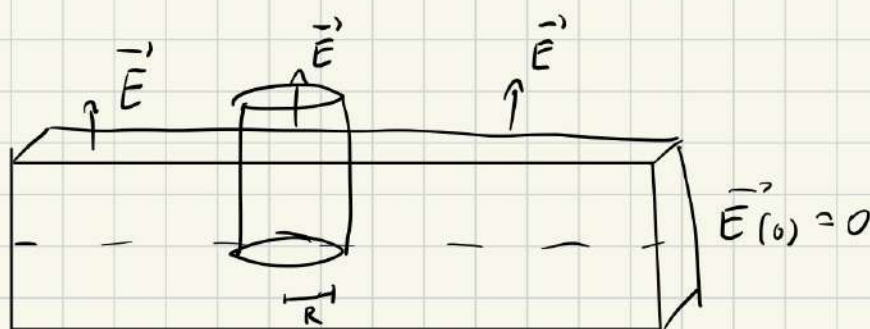
$$= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \text{Volumen}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot R^2 \pi \cdot z$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \hat{z}$$



Caso $z > h/2$



Al igual que el caso $z < h/2$ en el manto y base
inferior de la superficie Gaussiana el flujo

es 0

$$\Rightarrow \Phi_{\text{total}} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{s} = \int_{\text{base sup.}} \vec{E}' \cdot d\vec{s}$$

$$= E \int dS$$

$$= E (R^2 \pi)$$

Por Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

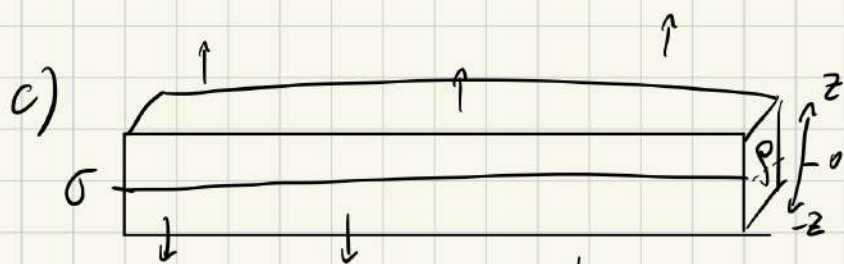
$$E (R^2 \pi) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \text{Volumen}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \pi R^2 \cdot \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \rho \frac{h}{2} \hat{z} \quad \text{no depende de } z$$

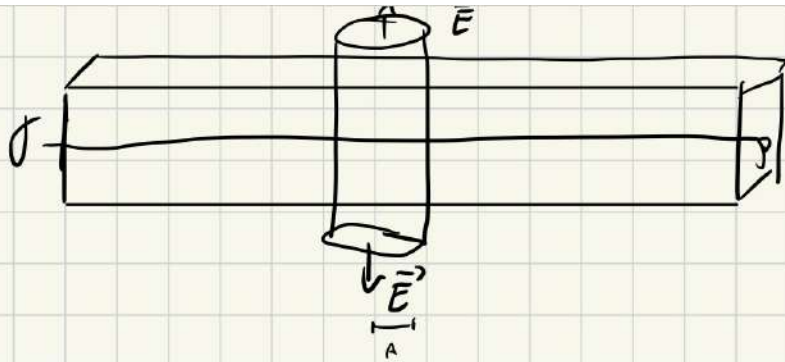
$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \begin{cases} \rho / \epsilon_0 z \hat{z} & |z| < h/2 \\ \frac{\rho \cdot h}{2 \epsilon_0} \hat{z} & z > h/2 \\ -\frac{\rho \cdot h}{2 \epsilon_0} \hat{z} & z < -h/2 \end{cases}$$

→ Caso del campo inferior y afuera de la placa.



Sabemos que tanto la placa de grosor despreciable como el de grosor h producen $\vec{E}$ en $\hat{z}$ solamente

Por lo tanto en este caso el campo solo tendrá componente en $\hat{z}$.



En nuestra superficie Gaussiana el flujo está dado por la suma del flujo de las bases, pues en el manto no hay flujo. Como las bases están fuera de la placa imponemos $\vec{E}=0 \Rightarrow \Phi_{\text{total}}=0$

Por Gauss $\Phi_{\text{total}} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0} = 0$

$$Q = \rho \cdot \text{Vol} + \sigma \cdot \text{Area} = 0$$

$$\rho \cdot \text{Area} \cdot h + \sigma \cdot \text{Area}$$

$$\Rightarrow \rho \cdot h = -\sigma$$